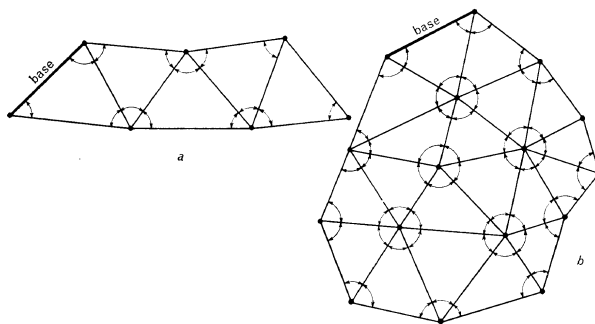


6 OPERAZIONI TOPOGRAFICHE

Il rilievo topografico consiste nella determinazione della posizione di un certo numero di punti al fine di poter rappresentare la porzione di territorio su di una carta. E' possibile eseguire due tipi di rilievo: il rilievo planimetrico, il rilievo altimetrico. Il primo individua la proiezione dei punti della superficie terrestre sulla superficie di riferimento, mentre il secondo individua le quote dei punti ovvero la distanza di questi dalla superficie matematica lungo la direzione della normale. Questi due tipi di rilievo implicano differenti modalità di calcolo e procedure.

6.1 RILIEVO PLANIMETRICO

Gli schemi geometrici per i collegamenti planimetrici di punti sul terreno sono essenzialmente due: il primo consiste in un poligono o in una serie di poligoni che congiungono tutti i punti di cui si misurano gli angoli nei vertici e le lunghezze dei lati; il secondo collegamento è realizzato



invece per mezzo di triangoli (*triangolazione*, *trilaterazione*), per la cui determinazione è sufficiente misurare due elementi per ciascun triangolo (due angoli, due lati, un lato ed un angolo), ad eccezione di uno dei triangoli in cui gli elementi misurati devono essere tre, di cui almeno un lato.

Nelle *triangolazioni* si utilizzano le sole misure angolari ad eccezione della misura di una sola base; nella *trilaterazione*, invece, si misurano le basi, tuttavia per ottenere dati di misura largamente sovrabbondanti (compensazione rigorosa), in alcuni casi si eseguono anche misure angolari.

Le poligonali pur presentando i vantaggi di meglio approssimare l'andamento del terreno e di richiedere la sola visibilità dei due punti adiacenti, hanno il difetto di un aumento progressivo dell'errore nella direzione di un lato e di consentire, a prescindere dal numero di lati, l'esistenza di sole tre misure sovrabbondanti misurando angoli e distanze. Le triangolazioni (o trilaterazioni) costituiscono una struttura assai più rigida delle poligonali e, se bene studiate e conformate, limitano considerevolmente la propagazione degli errori, inoltre il numero elevato di elementi sovrabbondanti ne consente la compensazione. D'altro canto è necessaria un'ampia visibilità da ogni vertice in molte direzioni.

6.1.1 Reti trigonometriche

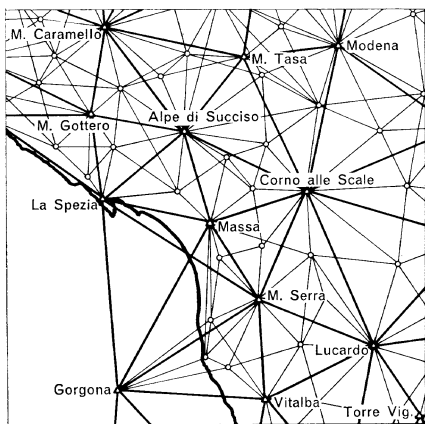
Nel principio della triangolazione (introdotto dall'olandese Snellius), sono scelti i punti da collegare per determinare la posizione reciproca, congiungendoli a due a due in modo da costituire una serie di triangoli aventi successivamente un lato in comune. Si misura un lato di un triangolo (base della triangolazione) e possibilmente tutti gli angoli interni dei triangoli. In questo modo, nota la posizione di un vertice di partenza e la direzione (ossia l'azimut) di un lato uscente da esso, sono definite le posizioni di tutti i punti, i quali prendono il nome di *vertici trigonometrici*.

I due schemi di triangolazione più usati sono a catena e/o a rete; la differenza consiste nel fatto che, mentre in una catena il passaggio da un lato ad un altro successivo qualunque può avvenire per una sola strada, nella rete il passaggio può avvenire per più strade, cosicché esistono possibilità di controllo e di compensazione dovute alla conformazione stessa della rete.

Sul territorio nazionale sono distribuiti una serie di punti costituenti la “*Rete Geodetica Italiana*” la quale rappresenta l'ossatura del sistema di riferimento italiano. I differenti punti sono stati misurati attraverso metodologie tradizionali e determinazioni astronomiche. La rete così costituita è denominata *rete trigonometrica* ed ha punti del I, II, III e IV ordine.

La rete di triangolazione italiana del I ordine è una rete, con punti a distanza (24 basi) di 30-40 km; su di essa è stata eseguita una rigorosa compensazione di insieme, con elevata precisione (gli angoli sono stati misurati eseguendo 24 reiterazioni).

Alla rete del I ordine si collega quella del II ancora di pochi punti, situati, nello schema a rete, ciascuno all'incirca nel baricentro dei triangoli di I ordine e collegati ai vertici di questi ultimi ed



agli altri vertici del II ordine con misure angolari un po' meno precise delle precedenti (12 reiterazioni); la compensazione delle reti del II ordine è locale e si riferisce ai vertici di primo ordine supposti esatti.

Le triangolazioni di III (6 reiterazioni) e IV ordine (3 reiterazioni) servono ad intercalare nella rete di precisione sempre più numerosi punti di appoggio utili per le operazioni di rilievo topografico. La precisione è sensibilmente inferiore alle precedenti, poiché i punti sono

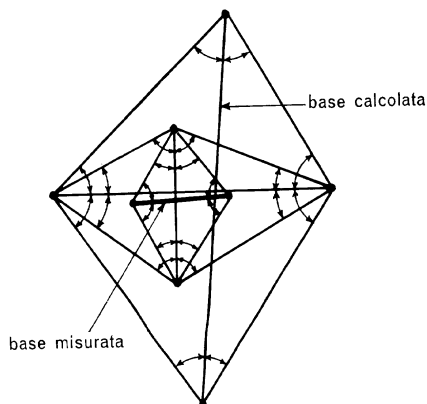
determinati appoggiandosi ai vertici di ordine superiore, misurando gli angoli. Per i vertici del III ordine si compensa ancora una triangolazione vera e propria; per quelli del IV ordine si adottano

invece procedimenti di intersezione multipla in avanti ed anche all'indietro (compensazione per intersezione e/o a punti isolati).

All'interno di tali reti possono essere costruite le ulteriori poligonali o triangolazioni per esigenze tecniche e topografiche fino a giungere ai dettagli (2 o 1 sola misura).

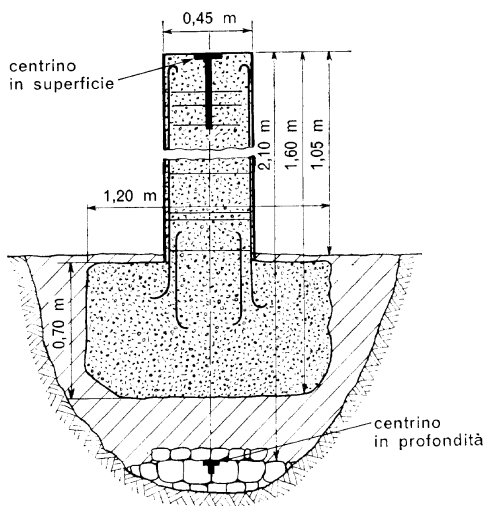
La scelta dei vertici si basa su alcuni criteri fondamentali:

- distanza reciproca il più grande possibile, nei limiti della visibilità consentita (30-40 km, riducibili a 10-20 km per i punti del II ordine);
- forma dei triangoli preferibilmente equilateri (il che comporta una minimizzazione dell'ellissi d'errore di ogni punto);
- posizionamento in punti dominanti (perché sia possibile il loro collegamento col maggior numero di vertici vicini ed in modo che costituiscano ottimi punti di *collimazione*), possibilmente protetti (la distruzione dei segnali comporta una grave menomazione di tutta la triangolazione).



I vertici del I e del II ordine hanno in maggioranza segnali propri: raramente sono posti su edifici, per ottenere un maggior campo di visibilità ed una più grande stabilità.

Nella triangolazione fondamentale italiana, il segnale è costituito da un pilastro con un centrino di fondo ed uno di superficie che individua effettivamente il vertice e che sovente si prolunga nel pilastro.



056129	Comando Regione Militare Nord-Ovest-Torino		
N°	Staz. C.C. S. Benigno Canavese		
	Comune S. Benigno Canavese Prov. Torino		
	Proprietario		
N°	056129		
mod. 281/GAR I.C.M.	MONOGRAFIA		
	(1954) Belvedere della cascina		
	Asse geometrico del belvedere		
N°	Coordinate geografiche		
056129	45° 13' 30'' . 919	- 4° 41' 39'' . 744	
N°	Coordinate Gauss-Boaga		
056129	6 008 817,78	1 402 488,09	
N°	Quota al PP H = 228,43		
056129	PP = Gronda tetto belvedere		
	TRIG. Nome	Ord.	F° N°
	CASCINA MORENTONE	IV	056 ● 129

L'I.G.M. fornisce a richiesta le monografie dei vertici trigonometrici fondamentali contenenti:

- posizione del punto (accurata descrizione) e suo disegno (in corrispondenza di un certo punto di vista);
- coordinate N-E (al centimetro) riferite al sistema Gauss-Boaga;
- coordinate geografiche ellissoidiche (φ, λ);
- quota al "piano di paragone" (p-p) segnato nel disegno.

Lo schema adottato dall'I.G.M. prevede, pertanto, una rete di triangoli di 4 ordini successivi aventi lati più o meno lunghi in dipendenza delle caratteristiche morfologiche del terreno (ad esempio, più lunghi i lati di collegamento fra penisola e isole, più corti quelli posti in zone di alta montagna). Infittendo sempre più i punti (arrivando a punti del IV ordine), l'I.G.M. ha avuto a disposizione un numero di vertici con una densità tale da avere le distanze reciproche fra vertici di qualsiasi ordine di circa 5 Km. Tale densità è sufficiente per la redazione di una carta in scala 1:25000.

Le fasi successive di una triangolazione sono le seguenti:

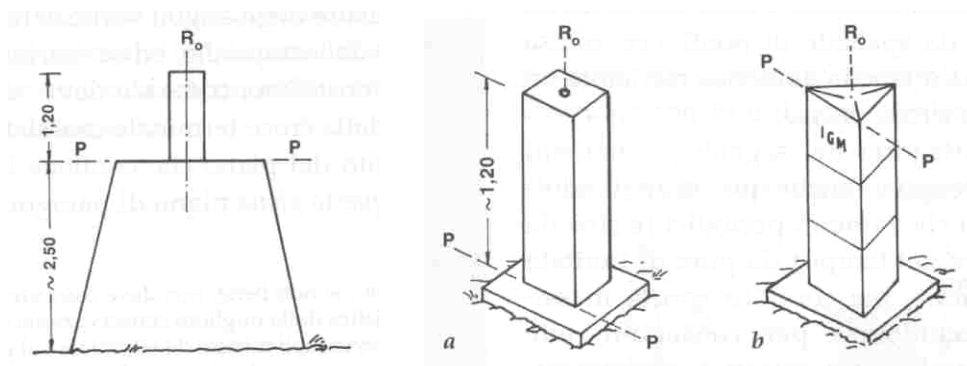
1. progetto delle rete;
 2. individuazione e scelta dei vertici;
 3. segnalizzazione dei vertici;
 4. esecuzione delle misure lineari e angolari;
 5. calcolo e compensazione della rete.
1. I triangoli del I ordine devono avere una lunghezza di circa 50\60 Km ed avere una conformazione geometrica che, a parità di precisione delle grandezze misurate, rende minimo l'errore sulle grandezze da determinare. L'errore che si commette nella misura del lato è, infatti, proporzionale alla misura del lato stesso ed agli errori commessi nel misurare gli angoli, inoltre, gli errori su questi ultimi sono più probabili nelle misure di angoli molto piccoli ovvero l'errore sulla misura di un lato aumenta al diminuire dell'ampiezza degli angoli interni al triangolo. Il valore dello scarto quadratico medio nella misura di un certo lato a del triangolo è:

$$\sigma_a = \pm a \cdot \sigma \cdot \sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \gamma}$$

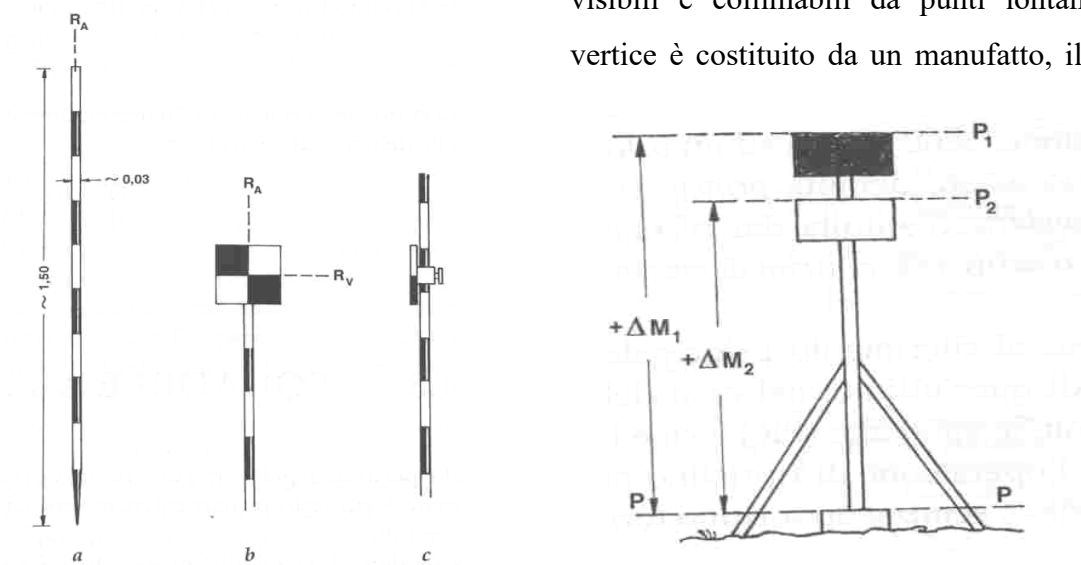
dove con σ si indica lo scarto quadratico medio delle misure dei due angoli, scarto supposto uguale, in valore, per i due angoli. Relazioni analoghe esisteranno ovviamente per i rimanenti due lati.

La cotangente di un angolo aumenta (tendendo ad infinito) per valori molto piccoli degli angoli, di conseguenza scegliere nella rete triangolazioni angoli molto piccoli, aumenta notevolmente gli errori, quindi la conformazione dei triangoli più adatta a limitare gli errori è quella del triangolo equilatero.

2. La scelta dei vertici della rete di triangolazione, deve rispondere a criteri pratici ed operativi; i vertici devono essere reciprocamente visibili e quindi situati in punti elevati quali punti di elevata altezza ovvero punta di un campanile, punto più alto di un edificio, etc.
3. La segnalizzazione dei vertici deve renderli concretamente visibili, stabili e ritrovabili in



qualunque momento. I vertici non solo devono essere stazionabili, ma devono anche essere visibili e collimabili da punti lontani. Se il vertice è costituito da un manufatto, il segnale



sarà costituito da un punto di simmetria appartenente al manufatto stesso. Qualora invece il vertice ricada sul terreno, il pilastrino che lo rappresenta non è sempre collimabile a lunghe

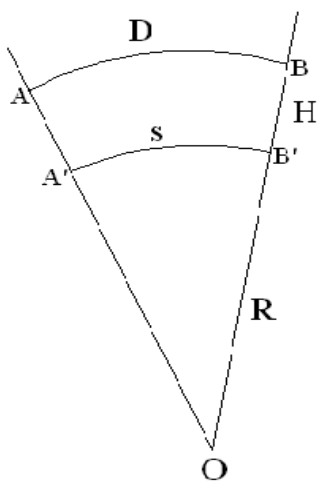
distanze e quindi occorre dotarlo di una mira, ovvero di un segnale di forma opportuna che ne permette identificazione anche da lontano (tramite binocoli).

Esistono mire fisse e mire mobili: le prime sono delle aste sormontate da cartelli dipinti in bianco e nero disposti a croce di S. Andrea, le seconde sono costituite da piramidi a base quadrata, verniciata in bianco e nero posta in opera con l'asse verticale passante per il vertice (di più difficili collimazione). Le collimazioni di entrambe diventano difficoltose a distanze superiori ai 20\30 Km, in tal caso si ricorre ad altri strumenti, di utilizzazione diurna o notturna. I segnali che servono per collimazioni diurne sono gli elioscopi, ovvero dei cannocchiali dotati di specchi opportunamente orientabili, per le operazioni notturne si usano proiettori luminosi, dotati di luce intermittente distinguibile dalle altre luci nella notte.

Per vertici del II ordine è possibile considerare croci di campanili i quali tra l'altro sono fissi nel tempo.

6.1.2 Misura delle basi geodetiche

Base geodetica o topografica è il lato su cui poggia la triangolazione geodetica o topografica di una rete. La base geodetica dovrebbe essere, in teoria, non una linea retta, ma un arco tracciato sulla superficie del geoide, e precisamente quello che congiunge i due primi vertici della triangolazione. La lunghezza della base geodetica deriva da una misura diretta. Se si opera con metodi tradizionali non sempre è possibile misurare un lato (ad esempio un lato che unisce due punti del I ordine), poichè troppo lungo o di non facilmente collimazione. Si misura, pertanto, una distanza sensibilmente più corta, *base misurata*, suddividendola in tanti tratti la cui somma fornirà la misura totale della base geodetica.



Da essa mediante misure angolari si passa al primo lato della triangolazione che si chiama *base calcolata*.

Per la misura delle basi occorre una precisione di 1mm per Km (equivalente ad un errore relativo di 10^{-6}) poiché la propagazione dell'errore porterebbe a precisioni inferiori inaccettabili sulla misura della base calcolata.

La distanza misurata sul terreno deve essere ridotta alla superficie di riferimento.

Indicando con:

- *D* la base misurata

- S la misura della base ridotta
- H la quota media di base
- $R = \sqrt{\rho N}$ il raggio medio della sfera locale

ed applicando il *Teorema di Talete* ai due triangoli AOB e $A'OB'$ si ottiene per similitudine:

$$\frac{S}{D} = \frac{R}{R+H} \Rightarrow S = D \frac{1}{1 + \frac{H}{R}} = D \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-1}$$

Poiché H/R è un infinitesimo del quarto ordine, è possibile eseguire lo sviluppo in serie arrestandosi ai termini di ordine superiore in modo tale che:

$$S \cong D \left(1 - \frac{H}{R}\right) = D - \frac{H}{R}$$

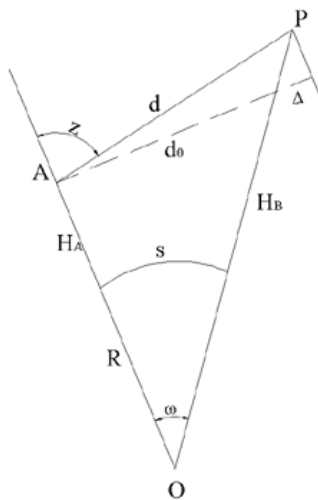
Occorre valutare per quale quota minima bisogna tener conto della correzione e con quali precisioni bisogna conoscere H e R , affinché l'errore relativo sia inferiore a 10^{-6}

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{D-S}{D} = \frac{H}{R} < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad H < 6m$$

per altezze superiori la precisione diminuisce.

Se la distanza sulla superficie fisica è misurata con un apparato elettronico, questa non è orizzontale. Si suppone che, con opportune correzioni che tengano conto della rifrazione, la misura fornisce il valore della lunghezza della corda d fra i due punti da ridurre a s sulla superficie di riferimento.

Si indica con ω l'angolo tra le due rette perpendicolari nei due punti sulla sfera locale di raggio



R ; tramite l'ausilio della Formula di Briggs, applicata al triangolo AOP si ottiene:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{[p - (R + H_A)][p - (R + H_B)]}{(R + H_A)(R + H_B)}} \quad (6.3)$$

avendo indicato con p il semiperimetro. Determinando il valore di ω dalla (6.3) si ottiene: $s = \omega \cdot R$

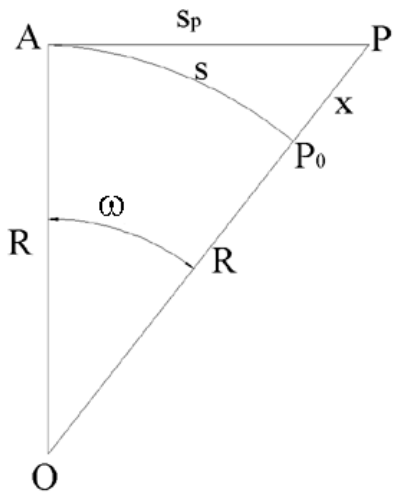
Indicando con Δ la *correzione di convergenza*, ovvero la differenza tra la distanza topografica e quella misurata, ed osservando la figura è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$d_0 = ds \operatorname{sen} z$$

$$s = \omega \cdot R = R \arctg \frac{d_0 - \Delta}{H_A + R} \cong R \frac{d_0 - \Delta}{H_A + R} \text{ approssimazione valida per } d < 18 \text{ km}$$

$$\Delta = d \cos z \operatorname{tg} \omega = d \cos z \frac{d_0 - \Delta}{H_A + R} = d^2 \frac{\cot gz}{H_A + R} - \frac{\Delta d \cos z}{H_A + R} \cong d^2 \frac{\cot gz}{R}$$

che per $d < 5 \text{ km}$ vale al massimo una ventina di cm .



Dal triangolo rettangolo AOP, retto in A, si ricava mediante il Teorema di Pitagora:

$$R^2 + s_p^2 = (R + x)^2$$

sviluppando il quadrato al secondo membro e trascurando x^2 perché infinitesimo del II° ordine è possibile ricavare x (errore di sfericità) mediante la formula:

$$x = \frac{s_p^2}{2R}$$

Assegnando differenti valori a s_p si ottiene la seguente tabella:

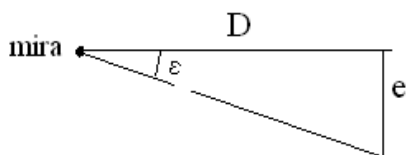
$s_p \text{ (km)}$	0,1	0,5	1	10	15
$x \text{ (m)}$	0,0008	0,020	0,079	7,892	17,757

6.1.3 Misure degli angoli

Gli errori accidentali nella misura degli angoli orizzontali sono:

- errori accidentali di natura strumentale (errore di collimazione ed errore di lettura ai cerchi graduati);
- errori accidentali di centramento (dello strumento sul punto di stazione e del segnale sul punto collimato).

L'influenza degli errori di centramento è inversamente proporzionale alla distanza D di collimazione, mentre quella degli errori strumentali ne è indipendente.



L'errore di centramento per l'inesatto posizionamento dello strumento sul punto di stazione genera un'eccentricità e di conseguenza un errore nella lettura azimutale di un angolo ε data da:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{e}{D}$$

essendo e ed ε piccoli è possibile approssimare $\varepsilon=e/D$, l'effetto è pertanto, inversamente proporzionale alla distanza, la condizione più sfavorevole è , pertanto, quella di perpendicolarità con la linea di collimazione.

Ad esempio per

$$a. D=50m \Rightarrow \varepsilon= 20'';$$

$$b. D=5 km \Rightarrow \varepsilon= 0,2''.$$

Poiché si lavora con precisioni di qualche decimo di grado sessagesimale, se siamo in a si opera in condizioni di centramento forzato (ad esempio nel caso di fabbricati), in b è possibile prescindere dal centramento forzato in quanto è garantita la precisione degli angoli (dell'ordine di 10^{-6}) che è maggiore della precisione delle distanze (dell'ordine di 10^{-5}).

Altre cause che possono indurre ad errori sistematici nella misura di un angolo e che sono di carattere ambientale sono l'errore di fase e di rifrazione laterale.

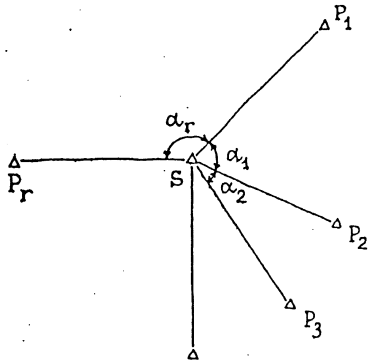
L'errore di fase è da imputarsi al fatto che, durante il giorno, uno stesso oggetto (ad esempio la punta di un campanile) è illuminato diversamente e che quindi, incida sulla sensibilità di mira dell'operatore, il quale tenderà ad allineare il centro del suo strumento sempre verso la parte più illuminata dell'oggetto collimato. Le condizioni migliori, quindi, per l'esecuzione della misura sono quelle in cui vi è assenza di sole o quando tutto l'oggetto è ugualmente illuminato

La rifrazione laterale è dovuta al fatto che la linea di mira, che va dal punto A ad un punto B, non coincide col segmento di retta AB, a causa della rifrazione atmosferica. La linea di collimazione attraversa strati di aria a diversa densità, e quindi a diverso indice di rifrazione, e di conseguenza subisce una serie di rifrazioni successive. Si forma perciò una linea curva che non coincide affatto con la congiungente rettilinea dei due punti. In ogni caso la linea di mira può essere considerata curva ma contenuta nel piano verticale contenente i due punti da collimare. Per eliminare quest'ultimo tipo di errore si dovrà cercare di eseguire le misure in condizioni di cielo coperto, in cui l'effetto di rifrazione laterale sarà certamente minore.

6.1.3.1 Angoli semplici a giro d'orizzonte

Si immagina di essere in stazione con il teodolite su un certo vertice S e di dover misurare le i vertici trigonometrici circostanti, visibili da S. La misura ad angoli semplici a giro d'orizzonte

consiste nel collimare a due a due i punti dal vertice S (si decide in base al tipo di precisione che si vuole conseguire, quante misure di uno stesso angolo si vogliono eseguire) procedendo in questo modo:



- si collima il punto P_1 leggendo sul cerchio orizzontale la lettura l'_1 ; si collima il punto P_2 leggendo sul cerchio orizzontale la lettura l'_2 ; si ruota il cannocchiale di 180° , si ricollima i punti e si riesegono le letture coniugate l''_2, l''_1 . La differenza fra le letture coniugate iterate n volte fornisce un dell'angolo α_1

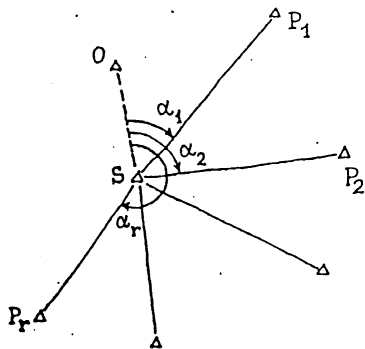
$$\alpha_1 = \frac{l''_2 + l'_2 - \pi}{2} - \frac{l''_1 + l'_1 - \pi}{2}$$

di queste α_1 se ne determinano n a seconda del numero di iterazione. Indicando con r il numero di vertici collegati, il numero delle misure è pari a $4rn$ e l'equazione di condizione è

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi.$$

Per detta metodologia occorrono tre squadre una sul punto di stazione S e le altre due sui punti di rispettiva collimazione.

6.1.3.2 Metodo delle direzioni isolate



Si sceglie una direzione isolata OS cui riferire tutti gli angoli estranei ai vertici di misura, tale scelta dipende dal fatto che la sua posizione è la migliore possibile per eseguire buone collimazioni.

La procedura è simile alla precedente per ciascun vertice $P_1 \dots P_r$ si determinano gli angoli $\alpha_1 \dots \alpha_r$ facendo stazione in S .

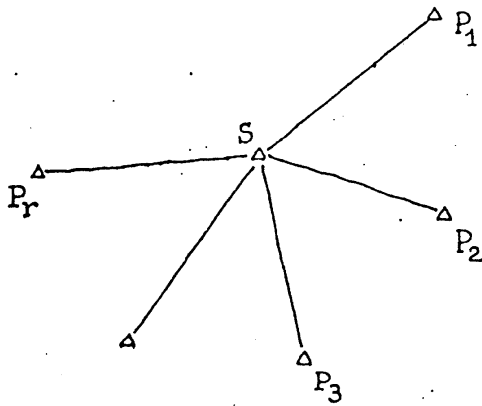
Il numero di misure è $4rn$. Il vantaggio è che tale misura

richiede solo due squadre una sul punto di stazione e l'altra sul punto che si va a considerare, lo svantaggio è che i valori misurati degli angoli sono completamente indipendenti e dunque non è possibile alcuna compensazione.

Considerando $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_{P_1SP_2}$ si ha $\sigma_{P_1SP_2} = \pm \sqrt{\sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2}$ con σ_{α_1} e $\sigma_{\alpha_2} \neq \sigma_{P_1SP_2}$

6.1.3.3 Metodo degli strati

Si sceglie un punto P origine appartenente ad uno dei vertici fra cui si devono misurare gli angoli e si procede in questo modo:



- si collima il punto P e si esegue la lettura, poi si collimano successivamente tutti i punti e si eseguono le relative misure; si ruota il cannocchiale di 180° gradi e si riefettuano le misure fino a tornare indietro al punto P di partenza.

Per una direzione si sono eseguite due letture misure, una in *andata* e una in *ritorno*, se le direzioni sono r le misure effettuate sono $2r$. Se si desidera reiterare n

volte, allora si eseguiranno, con le stesse modalità, n strati ottenendo n valori per ciascuna direzione per un totale $(2r)n$ operazioni di lettura sul teodolite.

Questo metodo è meno preciso poichè durante ogni *strato* non si può intervenire per correggere l'assetto dello strumento; inoltre non vi è possibilità di compensazione, con l'angolo giro.

Per concludere si può dire che i primi due metodi saranno usati per i vertici della I e II classe, mentre il metodo degli strati sarà riservato ai vertici di III e IV classe.

6.2 LEGGE PITAGORICA DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Data una funzione $z = f(x, y)$ la sua varianza è $\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$ se

$$z = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow \sigma_\alpha^2 = (1)^2 \cdot \sigma_{\alpha_2}^2 + (-1)^2 \cdot \sigma_{\alpha_1}^2 \Rightarrow \sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\alpha_1}^2$$

$$\text{Se in generale } \sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 = \sigma_{\alpha_2}^2 \Rightarrow \sigma_{P_1SP_2}^2 = 2\sigma_\alpha^2$$

6.3 COMPENSAZIONE E CALCOLO DELLE TRIANGOLAZIONI

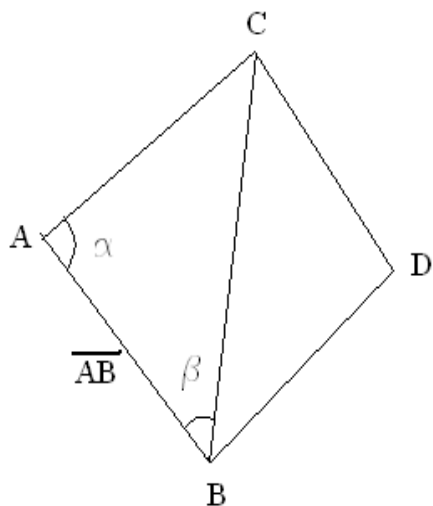
Per compensare una rete di triangolazione si può osservare sia il metodo delle osservazioni condizionate sia quello delle osservazioni indirette.

La differenza fra i due metodi consiste non soltanto nei procedimenti analitici per la compensazione, ma anche nel fatto che, procedendo per osservazioni condizionate, si fa preliminarmente una compensazione degli elementi misurati, poi, sulla base degli elementi compensati, si calcola la rete di triangolazione; procedendo invece col metodo delle osservazioni indirette, prima si calcolano dei valori di prima approssimazione delle coordinate dei vertici, poi si apportano a questi valori di prima approssimazione le correzioni più plausibili per ottenere i

valori compensati.

Per poter compensare una rete di triangolazione, indipendentemente dal metodo che si usa, è necessario che gli elementi misurati siano in numero sovrabbondante.

Se si vuole determinare, infatti, la posizione relativa di due punti A e B, occorre un solo elemento, cioè la distanza fra i due punti, se poi si vuole determinare la posizione relativa dei primi due rispetto ad un terzo punto C sono necessari tre elementi: la distanza AB e due angoli α e β .



In generale quindi si può dire che se la rete di triangolazione presenta n vertici trigonometrici di cui uno noto, gli elementi necessari e sufficienti per individuare le posizioni relative saranno $3+2(n-3) = 2n-3$, se invece i vertici noti sono due gli elementi necessari saranno $3+2(n-2) = 2n-1$.

Se il numero N di elementi misurati (lati e angoli) è maggiore di $2n-3$ (ovvero $2n-1$), esisteranno elementi in soprannumero e si potrà pertanto procedere ad una compensazione.

6.1.1 Metodo delle osservazioni condizionate

Nel metodo delle osservazioni condizionate ogni elemento misurato in più rispetto a quelli strettamente necessari consente di scrivere un'equazione di condizione che si dividono in tre gruppi:

- 1) equazioni alle basi;

- 2) equazioni poligonali;
- 3) equazioni laterali.

6.1.1.1 Equazioni alle basi

Per il calcolo di una rete di triangolazione, è sufficiente una sola base misurata, in quanto le misure degli angoli ne fissano univocamente la forma, mentre il valore della lunghezza di un lato ne determina le dimensioni. Se invece di una sola base se ne misurano più di una ogni base misurata fornisce una equazione di condizione.

Avremo quindi $[b-1]$ equazioni di condizione alle basi, se b è il numero di basi misurate.

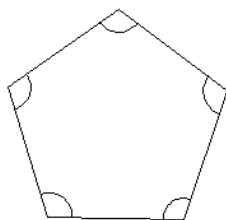
6.1.1.2 Equazioni poligonali

Esprimono delle equazioni di condizione sulle figure generate dal collegamento dei vertici, ad esempio, la somma degli angoli interni della rete di triangolazione cui si misurano i tre angoli risulta uguale a 180° (più l'eccesso sferico qualora debba essere messo in conto), oppure che la somma degli angoli del giro d'orizzonte è uguale a 360° .

Sia $n=(n_1+n_2)$ il numero di vertici di una rete di cui:

- n_1 rappresenta il numero di vertici su cui si fa stazione
- n_2 rappresenta il numero di vertici su cui non si fa stazione

Supponiamo che la nostra rete presenti $l= (l_1+l_2)$ lati di cui:



- l_1 lati che congiungano due vertici su cui si è fatto stazione
- l_2 lati che congiungano un vertice su cui non si è fatta stazione.

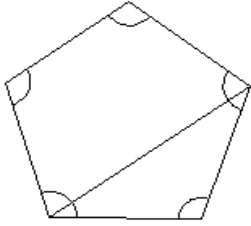
Si considera, ad esempio, un pentagono e si suppone che si sia fatta stazione su tutti i vertici e che si siano misurati tutti gli angoli interni si ha:

$$n = n_1 = 5$$

$$l = l_1 = 5$$

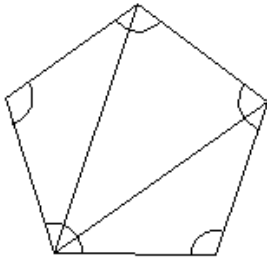
in questo caso l'equazioni poligonali che gli angoli devono soddisfare è:

$$(n - 2)\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Rightarrow 3\pi = \sum_{i=1}^5 \alpha_i$$



Se aggiungiamo un lato congiungente due vertici $n = n_l = 5$, mentre $l = l_l = 6$; in tal caso l'equazioni poligonali saranno $6-5+1=2$ (una relativa al quadrilatero l'altra relativa al triangolo) del tipo:

$$\begin{cases} 2\pi = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \\ \pi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \end{cases}$$



Consideriamo ora una seconda diagonale ed avremo ancora $n = n_l = 5$ mentre sarà $l = l_l = 7$.

In questo caso si potranno scrivere $7-5+1=3$ equazioni poligonali (una per ogni triangolo) del tipo:

$$\pi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

In generale, data una serie di n_l vertici e di l_l lati, il numero di equazioni poligonali sarà $l_l - n_l + 1$.

6.1.1.3 Equazioni laterali

Le equazioni laterali derivano dalla considerazione che generalmente in una rete di triangolazione c'è la possibilità di calcolare un lato, o più lati, seguendo strade diverse.

E' evidente che in tal caso intervengono nel calcolo angoli diversi e quindi si otterranno valori diversi, che invece dovrebbero essere uguali. Si impone perciò l'uguaglianza e si ottiene un'equazione di condizione laterale.

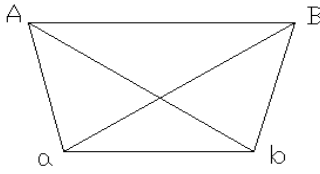
Per individuare agevolmente il numero di tali equazioni, si può ricorrere alla completa analogia che esiste fra una rete di triangolazione e una trave reticolare.

Affinché una trave reticolare sia internamente isostatica, deve essere $l = 2n - 3$, con n e l rispettivamente il numero dei nodi e delle aste.

Passando alla rete di triangolazione, diremo che:

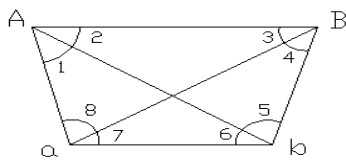
- è una rete semplice se il numero dei lati è uguale a $2n-3$,
- è una rete composta se il numero dei lati è superiore a $2n-3$.

Quindi il numero delle equazioni laterali che possiamo scrivere sono $l - (2n-3)$, dove n sono i vertici e l i lati della rete di triangolazione.



Supponiamo di avere la rete in figura di cui è nota la base AB e di voler conoscere il lato ab attraverso la risoluzione del triangolo aBb oppure aAb : $6 > 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow$ la rete è composta ed il numero di equazioni laterali è $1 - (2n-3) = 6 - (8-3) = 1$

• **ESEMPIO**



Sia AB la base misurata si suppone di misurare gli angoli $1, 2, \dots, 8$; il numero degli elementi noti e misurati è $N = 1 + 8 = 9$ ed il numero di osservazioni sovrabbondanti è $N - (2n - 3) = 9 - 5 = 4$ che indica anche il numero di equazioni di condizione.

In particolare:

- Equazione alle basi: $b - 1 = 1 - 1 = 0$
- Equazioni poligonali: $1 - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$
- Equazioni laterali: $1 - (2n - 3) = 6 - 5 = 1$

In definitiva: 1) eq. alle basi 0
 2) eq. poligonali 3 \Rightarrow 4 equazioni di condizione
 3) eq. laterali 1

Le equazioni poligonali saranno:

- per il triangolo DAB $1 + 2 + 3 + 8 = \pi$
- per il triangolo ABC $2 + 3 + 4 + 5 = \pi$
- per il triangolo BCD $4 + 5 + 6 + 7 = \pi$

mentre l'equazione laterale (A e B sono noti) può essere per il lato DC :

• $\begin{cases} BAD \Rightarrow D \\ ADC \Rightarrow C \end{cases} \Rightarrow DC$ oppure $\begin{cases} ABC \Rightarrow C \\ BCD \Rightarrow D \end{cases} \Rightarrow DC$ ecc.

Partendo da questi elementi, siamo in grado di eseguire il calcolo della nostra rete, determinando la lunghezza di tutti i lati ed il valore degli angoli eventualmente non misurati direttamente.

Tuttavia gli elementi che si misurano sono angoli e lunghezze relativi a sezioni normali, non a geodetiche; si è visto nel capitolo della geodesia, che lo scostamento lineare ed angolare delle sezioni normali dalle geodetiche è sempre molto piccolo ed in molti casi trascurabile. Sempre trascurabile è lo scostamento lineare; di solito trascurabile è anche lo scostamento angolare. Se

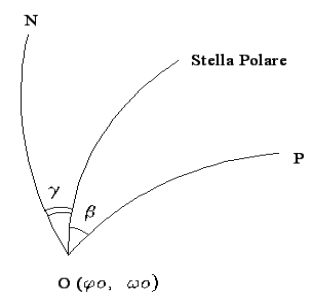
questo non è trascurabile esiste l'espressione già vista che consente il passaggio dall'angolo concernente le sezioni normali a quello fra le corrispondenti geodetiche.

Alla fase di calcolo della rete deve seguire una fase di determinazione delle coordinate dei vertici sotto forma di coordinate geodetiche polari.

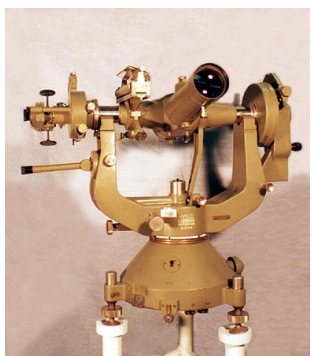
Qualora si vogliono determinare le coordinate geografiche dei vertici della rete, scelto un vertice, possibilmente centrale rispetto alla rete stessa, come origine della triangolazione, si determinano per via astronomica le sue coordinate e l'azimut di un lato della rete uscente da esso.

I criteri fondamentali attraverso i quali si eseguono le determinazioni astronomiche sono i seguenti.

- Per l'*azimut astronomico* di una direzione, si fa riferimento alla *sfera celeste* si collima un

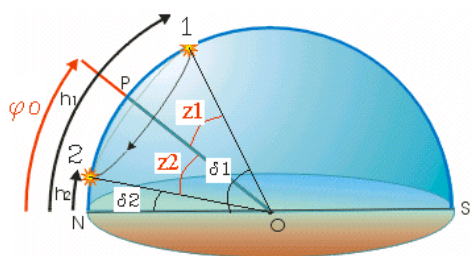


segnale luminoso (si opera naturalmente di notte) posto sul punto di cui si vuole determinare l'azimut astronomico, poi si collima ad istanti diversi una stella circumpolare (generalmente la stella polare) con un goniometro di tipo astronomico e si determina β ; se si conosce dal tabulato stellare la distanza tra il nord N e la stella polare in quel preciso istante, γ (azimut astronomico della polare), si risale all'azimut $\alpha = \beta + \gamma$. Questo goniometro deve avere quindi l'asse di collimazione spezzato, come ad esempio il modello T4 della Wild, che consente un'approssimazione di lettura ai cerchi del decimo di secondo. Normalmente si fanno numerose determinazioni (generalmente 18 o 24) nelle due posizioni coniugate dallo strumento e reiterando di volta in



volta il cerchio orizzontale.

- Per la *latitudine astronomica*, una volta determinato nel modo visto l'azimut di una certa mira, siamo in grado di mettere lo strumento in meridiano imponendo che il piano verticale



di collimazione dello strumento coincida con quello passante per il meridiano astronomico (celeste) nel punto. Con lo strumento in meridiano il piano di collimazione, ruotando intorno all'asse orizzontale, descriverà sulla sfera

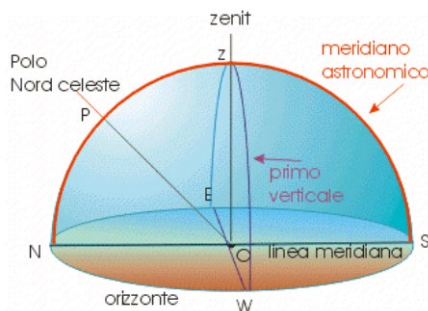
celeste un cerchio massimo. Se si considera la verticale per il punto di osservazione, la sua

direzione OP, forma con l'equatore celeste un angolo φ_0 che rappresenta la latitudine astronomica del punto stesso. Per determinare questo angolo con lo strumento in meridiano, si collimano due stelle (a Nord e a Sud) passanti per il meridiano del punto di osservazione. Misurando le distanze zenitali Z_1 e Z_2 relative alle due stelle e conoscendo dai cataloghi stellari le rispettive declinazioni per il medesimo istante (cioè gli angoli δ_1 e δ_2 che le direzioni dal punto alle due stelle formano con l'equatore celeste) si ottiene l'espressione:

$$\varphi_0 = \frac{(\delta_1 - z_1 + \varepsilon) + (\delta_2 + z_2 - \varepsilon)}{2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{z_2 - z_1}{2}$$

La latitudine φ_0 potrebbe essere determinata utilizzando una sola stella (per esempio $\varphi_0 = \delta_1 - z_1$), ma in tal caso si dovrà tener conto della rifrazione. Con due stelle invece, una a Nord e l'altra a Sud dello zenit e tali che $Z_1 \cong Z_2$ si elimina in sostanza l'influenza della rifrazione atmosferica, poichè essere supposta simmetrica.

- La *longitudine astronomica* si può definire come la sezione retta del diedro formato dal



meridiano astronomico del punto di stazione e dal meridiano astronomico fondamentale (di Greenwich). Tale sezione retta si può esprimere o in misura angolare o in misura di tempo. La determinazione della longitudine astronomica è basata sulla determinazione della differenza di

tempo esistente fra l'istante di transito di una stella al meridiano locale e quello di transito della medesima stella al meridiano fondamentale di Greenwich, registrando il primo mediante osservazioni in meridiano e conoscendo il secondo dei cataloghi stellari, è evidente che la differenza fra i due valori fornisce una determinazione della longitudine astronomica del punto di stazione.

Nella determinazione della longitudine fondamentale è la misura del tempo. Infatti, se si vuole determinare la stessa al decimo di secondo di arco, bisogna determinare il tempo a meno del centesimo di secondo.

I valori determinati per via astronomica si considerano come valori ellissoidici, il che significa orientare l'ellissoide di riferimento in quel punto, e in pratica imporre che in quel punto l'ellissoide ha la sua normale coincidente con la verticale, cioè con la normale geodetica. Tale coincidenza si ottiene imponendo l'uguaglianza dei valori astronomici ed ellissoidici della longitudine e della latitudine. Ciò fatto occorrerà imporre la coincidenza del meridiano

ellissoidico con il meridiano astronomico ruotando l'ellissoide di riferimento, la cui normale coincide con la verticale del punto, intorno a questa verticale, finché non si ha la coincidenza del meridiano astronomico col meridiano geografico.

Per la triangolazione italiana, il punto origine trigonometrico di I° ordine corrispondente all'osservatorio astronomico di Roma Monte Mario ed il lato della triangolazione uscente da questo punto di cui è stato determinato l'azimut astronomico è il lato Monte Mario – Monte Soratte.

6.1.2 Metodo delle osservazioni indirette

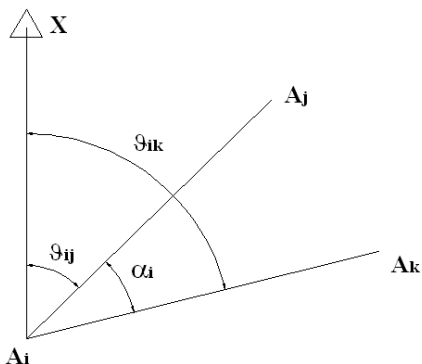
Si hanno delle equazioni in cui si introducono i valori approssimati delle coordinate dei vertici della rete e si stimano, secondo il processo dei minimi quadrati quali siano le correzioni da apportare al fine di ottenere i valori più plausibili. Di seguito si descrive la risoluzione di tale metodo che è generalmente indicato *come compensazione per variazione di coordinate*.

6.1.2.1 Equazione agli angoli

Consideriamo il punto di stazione A_i , presi i punti A_j ed A_k si misura l'angolo α_i^* definito dalle due direzioni $A_i A_j$ e $A_i A_k$. Emanando da A_i la parallela all'asse X del riferimento gaussiano e considerando l'angolo di direzione ϑ_{ij} (che forma con la corda $A_i A_j$) è possibile scrivere:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (6.5)$$

Se le coordinate di A_i e A_j sono quelle più plausibili, anche il valore dell'angolo di direzione sarà



quello più plausibile. Se invece le coordinate di A_i e A_j sono approssimate, avremo un valore approssimato anche dell'angolo di direzione.

Soprassegnando i valori approssimati, potremo scrivere:

$$\overline{\vartheta}_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{\overline{y}_j - \overline{y}_i}{\overline{x}_j - \overline{x}_i}$$

di conseguenza i valori più plausibili sono: $\vartheta_{ij} = \overline{\vartheta}_{ij} + \delta_{ij}$

dove δ_{ij} rappresenta la correzione. E' possibile, pertanto, scrivere:

$$\mathcal{G}_{ij} = \arctg \frac{(\bar{y}_j + \delta y_j) - (\bar{y}_i + \delta y_i)}{(\bar{x}_j + \delta x_j) - (\bar{x}_i + \delta x_i)} \quad (6.7)$$

ed espressioni analoghe per \mathcal{G}_{ik} . Si può quindi indicare con $\alpha_i = \mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{ij}$ il valore più plausibile dell'angolo e con $\bar{\alpha}_i = \bar{\mathcal{G}}_{ik} - \bar{\mathcal{G}}_{ij}$ il valore approssimato.

Partendo da diversi set di valori approssimati si ottengono sempre gli stessi valori plausibili.

Se indichiamo con α_i^* il valore misurato, si può scrivere l'equazione generatrice: $\alpha_i - \alpha_i^* = v_i$ (v_i rappresenta lo scarto) e se ne scriveranno tante per quanti sono gli angoli misurati.

Per linearizzare le equazioni generatrici occorre linearizzare \mathcal{G}_{ij} e \mathcal{G}_{ik} in serie di Taylor trascurando i quadrati delle correzioni ovvero arrendendosi ai termini del primo ordine.

$$\mathcal{G}_{ij} = \arctg \frac{(\bar{y}_j + \delta y_j) - (\bar{y}_i + \delta y_i)}{(\bar{x}_j + \delta x_j) - (\bar{x}_i + \delta x_i)} \quad (6.8)$$

Ricordando che se $y = \arctg x$, si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ lo sviluppo è il seguente:

$$\mathcal{G}_{ij} = \bar{\mathcal{G}}_{ij} + \delta y_j \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{x}_j - \bar{x}_i} - \delta y_i \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{x}_j - \bar{x}_i} - \delta x_j \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2} + \delta x_i \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2} \quad (6.9)$$

Osservando che:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{\cos \bar{\mathcal{G}}_{ij}} = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{\sin \bar{\mathcal{G}}_{ij}} \quad (6.10)$$

e sostituendo la (6.10) nella (6.9) si ottiene:

$$\mathcal{G}_{ij} = \bar{\mathcal{G}}_{ij} + \frac{\cos \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{D}_{ij}} (\delta y_j - \delta y_i) - \frac{\sin \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{D}_{ij}} (\delta x_j - \delta x_i) \quad (6.11)$$

Indicando con:

$$a_{ij} = \frac{\cos \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{D}_{ij}} \quad (6.12)$$

$$b_{ij} = \frac{\sin \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{D}_{ij}} \quad (6.13)$$

che possono essere considerati noti perché ottenuti dalle coordinate, si può scrivere:

$$\mathcal{G}_{ij} = \bar{\mathcal{G}}_{ij} + a_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) - b_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) \quad (6.14)$$

in modo analogo si otterrà:

$$\mathcal{G}_{ik} = \bar{\mathcal{G}}_{ik} + a_{ik} (\delta y_k - \delta y_i) - b_{ik} (\delta x_k - \delta x_i) \quad (6.15)$$

Pertanto le equazioni generatrici diventano:

$$\alpha_i - \alpha_i^* = v_i \Rightarrow \mathcal{G}_{ik} - \mathcal{G}_{ij} - \alpha_i^* = v_i \quad (6.16)$$

Nella (6.16) sostituendo i valori approssimati si ottiene:

$$\bar{\mathcal{G}}_{ik} - \bar{\mathcal{G}}_{ij} - \alpha_i^* = \bar{\alpha}_i - \alpha_i^* = l_i \quad (6.17)$$

sostituendo la (6.17) nella (6.16) si ottiene l'equazione generata:

$$(b_{ik} - b_{ij}) \delta x_i + (a_{ij} - a_{ik}) \delta y_i + b_{ij} \delta x_j - b_{ik} \delta x_k + a_{ik} \delta y_k - a_{ij} \delta y_j + l_i = v_i$$

Da queste equazioni generate (tante per quanti sono gli angoli misurati) si ottengono, attraverso il principio dei minimi quadrati $\sum_i p_i v_i^2 = \min$ (dove p_i rappresentano i pesi delle misure), le correzioni da apportare alle coordinate approssimate al fine di ottenere i valori più plausibili.

Pertanto in un procedimento di compensazione alle osservazioni indirette avendo a disposizione un numero sovrabbondanti di misure rispetto allo stretto necessario si ottiene un sistema di m equazioni nelle n incognite rappresentate dalle correzioni a cui vanno aggiunte le m v_i .

In forma matriciale si scriverà:

$$A \cdot X + L = V$$

Tale sistema è indeterminato, pertanto per la sua soluzione si ricorre al principio dei minimi quadrati $\sum_i p_i v_i^2 = \min$ che fornisce le ulteriori m equazioni ottenendo il pareggio con il numero delle incognite:

$$\begin{cases} A \cdot X + L = V \\ \sum_i p_i v_i^2 = \min \Rightarrow (A^T P A) \cdot X + A^T P L = 0 \end{cases}$$

posto $A^T P A = N$ con $N = \text{matrice normalizzata}$ si ottiene:

$$X = N^{-1} D$$

con $D = A^T P L$, determinate le correzioni si sostituiscono nella $A \cdot X + L = V$ per determinare i valori degli scarti.

Per quanto riguarda i pesi da attribuire alle equazioni, osserviamo che l'errore delle equazioni è uguale all'errore dei termini noti $l_i = \alpha_i - \alpha_i^*$. Infatti, i coefficienti a, b sono da considerare privi di errore perché non contengono le grandezze osservate. In conclusione, conoscendo gli errori delle quantità misurate α_i^* si possono calcolare i pesi, e questi sono anche i pesi dei residui v_i , per cui si può ridurre le equazioni generate allo stesso peso moltiplicandole per la radice quadrata (cioè

perché il peso varia con il quadrato della deviazione standard $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_x^2$) dei pesi così determinati.

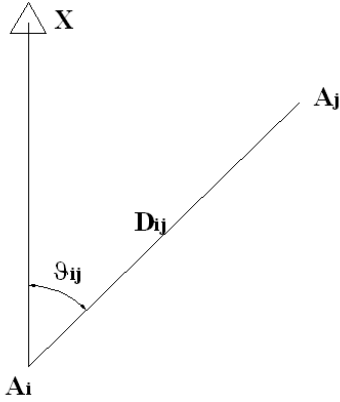
Per mezzo degli scarti ottenuti è possibile calcolare la *varianza dell'unità di peso* a posteriori $\bar{\sigma}_0$ che andrà confrontata con il valore arbitrario definito a priori (per la determinazione dei pesi) per valutare la bontà delle misure.

Dalla conoscenza della $\bar{\sigma}_0$ è possibile determinare gli e.q.m:

$$\sigma_i = \alpha_{ii} \bar{\sigma}_0$$

dove α_{ii} sono gli elementi della diagonale principale dell'inversa della matrice normalizzata.

6.1.2.2 Equazioni alle distanze



Le equazioni generatrici sono:

$$D_{ij} - D_{ij}^* = v_{ij} \quad (6.18)$$

dove

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (6.19)$$

Introducendo le coordinate approssimate

$$D_{ij} = \sqrt{(\bar{x}_j + \delta x_j - \bar{x}_i - \delta x_i)^2 + (\bar{y}_j + \delta y_j - \bar{y}_i - \delta y_i)^2} \quad (6.20)$$

e sviluppando in serie, arrestando lo sviluppo ai termini di primo

ordine, si ottiene:

$$D_{ij} = \bar{D}_{ij} + \delta x_j \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{\bar{D}_{ij}} - \delta x_i \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{\bar{D}_{ij}} + \delta y_j \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{\bar{D}_{ij}} - \delta y_i \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{\bar{D}_{ij}} \quad (6.21)$$

Ricordando che:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{\cos \bar{g}_{ij}} = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{\sin \bar{g}_{ij}} \quad (6.22)$$

si può scrivere:

$$D_{ij} = \bar{D}_{ij} + \cos \bar{g}_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) + \sin \bar{g}_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) \quad (6.23)$$

Ponendo $a_{ij} = \cos \bar{g}_{ij}$ e $b_{ij} = \sin \bar{g}_{ij}$, le equazioni generate possono essere scritte:

$$\bar{D}_{ij} + a_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) + b_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) - D_{ij}^* = D_{ij} - D_{ij}^* = v_{ij} \quad (6.24)$$

Se si introduce il termine noto $\bar{D}_{ij} - D_{ij}^* = l_{ij}$, l'equazione generata alle distanze è:

$$a_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) + b_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) + l_{ij} = v_{ij}$$

(6.25)

Per quanto riguarda i pesi da attribuire alle equazioni, anche in questo caso i coefficienti a, b sono da considerare privi di errore perché non contengono le grandezze osservate; quindi tutto l'errore è concentrato nel termine noto l_{ij} . Ma l'errore di l_{ij} è uguale all'errore della distanza misurata D_{ij}^* ($l_{ij} = D_{ij} - D_{ij}^*$), per questo conoscendo gli errori delle quantità misurate D_{ij}^* , posso calcolarne i pesi, e questi sono anche i pesi dei residui v_{ij} .

Il procedimento della compensazione è analogo a quello già visto per gli angoli.

Se si hanno nella compensazione solo equazioni agli angoli o solo equazioni alle distanze per la determinazione dei pesi non sussistono problemi, tuttavia, se si hanno entrambi i tipi di equazioni, poiché i residui delle equazioni agli angoli sono numeri puri, mentre quelli delle equazioni alle distanze sono lunghezze dimensionalmente non è possibile risolvere il sistema.

Tale problema può essere risolto uniformando i valori dei pesi

Il peso è un numero puro dato da

$$P_a = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_a^2}$$

$$P_D = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_D^2}$$

Se invece consideriamo come numero puro non il peso ma l'errore medio della unità di peso σ_0 , otteniamo che P_D non è un numero puro, ma l'inverso di una lunghezza al quadrato. Inoltre in generale σ_D^2 è proporzionale a D^2 per cui, conglobando la costante di proporzionalità in σ_D^2 , possiamo scrivere:

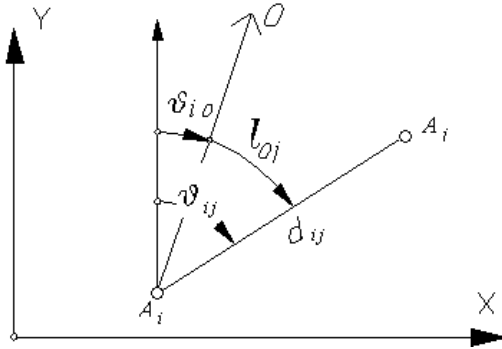
$$P_D = \frac{\sigma_a^2}{D^2}$$

Con questa ipotesi, se moltiplichiamo le equazioni alle distanze per le radici quadrate di tali pesi, (in pratica dividiamo le equazioni per le distanze), otteniamo dei numeri puri.

Poiché gli errori delle equazioni (residui) sono uguali agli errori delle misure, se dividiamo le equazioni per le distanze, otteniamo che gli errori delle equazioni sono uguali agli errori relativi delle misure, e quindi agli errori relativi di lunghezza. Questi allora possono essere senz'altro "confrontati" con gli errori sugli angoli, che possono anch'essi essere considerati come errori relativi di lunghezza essendo un angolo definito dal rapporto fra due lunghezze (arco e raggio).

Osserviamo infine che, per distanza misurata D_{ij}^* abbiamo inteso la lunghezza della corda sul piano della rappresentazione di Gauss. Pertanto la distanza effettivamente misurata sulla superficie fisica dovrà essere ridotta alla superficie di riferimento per ottenere la lunghezza dell'arco di geodetica.

6.1.2.3 Equazioni alle direzioni



Consideriamo il punto di stazione A_i , si misura l'angolo di direzione \mathcal{G}_{ij} che forma con il punto A_j (la direzione è identificata con O) è possibile scrivere:

$$\operatorname{tg} \mathcal{G}_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

Se le coordinate di A_i e A_j sono quelle più plausibili, anche il valore dell'angolo di direzione sarà quello più plausibile. Se invece le coordinate di A_i e A_j sono approssimate, avremo un valore approssimato anche dell'angolo di direzione.

Se le coordinate di A_i e A_j sono quelle più plausibili, anche il valore dell'angolo di direzione sarà quello più plausibile. Se invece le coordinate di A_i e A_j sono approssimate, avremo un valore approssimato anche dell'angolo di direzione.

Soprassegnando i valori approssimati, potremo scrivere:

$$\bar{\mathcal{G}}_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{\bar{x}_j - \bar{x}_i} \quad (6.26)$$

di conseguenza i valori più plausibili sono: $\mathcal{G}_{ij} = \bar{\mathcal{G}}_{ij} + \delta_{ij}$ dove δ_{ij} rappresenta la correzione. È possibile, pertanto, scrivere:

$$\mathcal{G}_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{(\bar{y}_j + \delta y_j) - (\bar{y}_i + \delta y_i)}{(\bar{x}_j + \delta x_j) - (\bar{x}_i + \delta x_i)}$$

Se indichiamo con \mathcal{G}_{ij}^* il valore misurato, si può scrivere l'equazione generatrice:

$$\mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{ij}^* = v_i$$

Linearizzando le equazioni generatrici mediante lo sviluppo in serie di Taylor e trascurando i quadrati delle correzioni ovvero arrestandosi ai termini del primo ordine si ottiene:

$$\mathcal{G}_{ij} = \bar{\mathcal{G}}_{ij} + \delta y_j \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{x}_j - \bar{x}_i} - \delta y_i \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij}}{\bar{x}_j - \bar{x}_i} - \delta x_j \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2} + \delta x_i \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{ij} (\bar{y}_j - \bar{y}_i)}{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2} \quad (6.27)$$

Osservando che:

$$\overline{D}_{ji} = \frac{\overline{x}_j - \overline{x}_i}{\cos \overline{\mathcal{G}}_{ji}} = \frac{\overline{y}_j - \overline{y}_i}{\sin \overline{\mathcal{G}}_{ji}} \quad (6.28)$$

e sostituendo la (6.28) nella (6.27) si ottiene:

$$\mathcal{G}_{ij} = \overline{\mathcal{G}}_{ij} + \frac{\cos \overline{\mathcal{G}}_{ij}}{\overline{D}_{ij}} (\delta y_j - \delta y_i) - \frac{\sin \overline{\mathcal{G}}_{ij}}{\overline{D}_{ij}} (\delta x_j - \delta x_i) \quad (6.29)$$

Indicando con:

$$a_{ij} = \frac{\cos \overline{\mathcal{G}}_{ij}}{\overline{D}_{ij}} \quad (6.30)$$

$$b_{ij} = \frac{\sin \overline{\mathcal{G}}_{ij}}{\overline{D}_{ij}} \quad (6.31)$$

che possono essere considerati noti in quanto ottenuti dalle coordinate, si può scrivere:

$$\mathcal{G}_{ij} = \overline{\mathcal{G}}_{ij} + a_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) - b_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) \quad (6.32)$$

Pertanto le equazioni generatrici diventano:

$$\overline{\mathcal{G}}_{ij} + a_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) - b_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) - \mathcal{G}_{ij}^* = v_{ij}$$

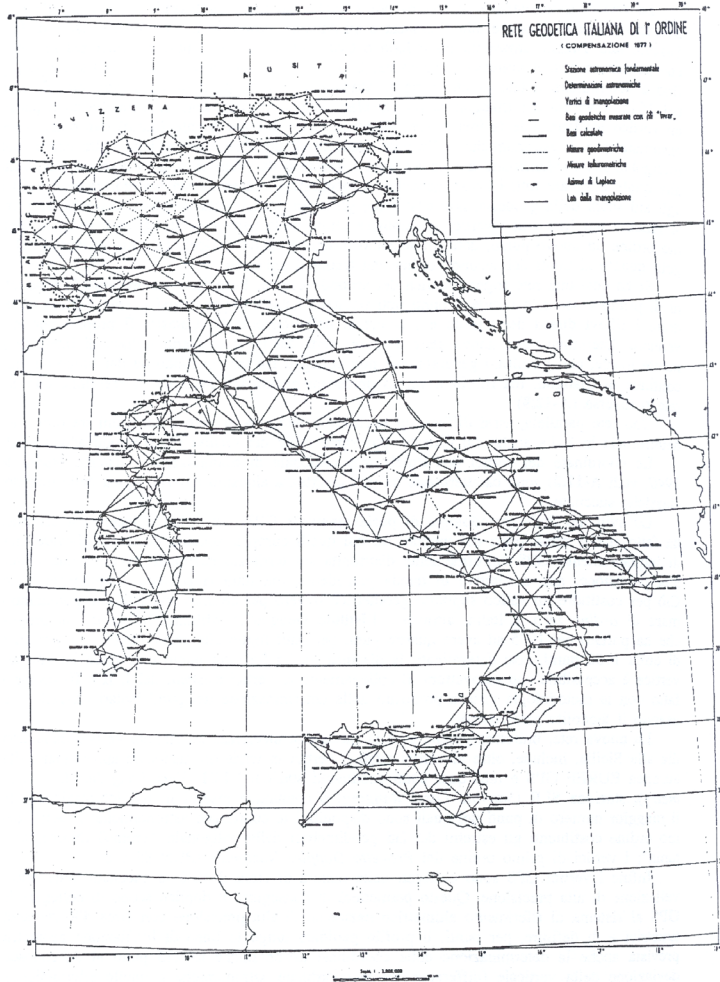
$$a_{ij} (\delta y_j - \delta y_i) - b_{ij} (\delta x_j - \delta x_i) + l_{ij} = v_{ij}$$

Le trattazioni successive sono identiche a quelle viste nei due precedenti paragrafi.

6.2 LE RETI FONDAMENTALI

Allo scopo di procedere alla formazione delle carte geografiche, topografiche e tecniche ed in pari tempo anche al fine scientifico di contribuire alla determinazione delle dimensioni terrestri e delle anomalie geoidiche, i geodeti hanno fissato sulla superficie terrestre tanti punti detti *vertici trigonometrici del primo ordine* i quali sono fra loro congiunti con archi di geodetica, in modo da dar luogo ad una rete di triangoli sferoidici aventi due a due un lato in comune. La totalità di questi triangoli che ricoprono un dato paese prende il nome di *triangolazione o rete trigonometrica del primo ordine*. I vertici sono dislocati in luoghi dai quali sia possibile la reciproca visibilità, di solito sulla cima dei monti o in coincidenza di assi di campanili e di torri; le mutue distanze, dette *lati* della triangolazione, si mantengono fra i 30 e i 60 km.

La forma dei triangoli è pressappoco equilatera, condizione di uniformità che conduce a diversi vantaggi pratici e teorici, fra i quali quello di attenuare il più possibile gli effetti degli errori di osservazione, quello di ridurre al minimo il numero dei triangoli necessari a ricoprire una data



regione, quello di offrire un'espansione ugualmente rapida della rete in tutte le direzioni e un'uniformità di visione reciproca dei vertici.

La rete di triangolazione si attacca poi a quelle dei paesi confinanti con l'Italia ossia Francia, Svizzera e Austria, e alla Dalmazia e all'Albania attraverso le Tremiti e le isole di Fema e Saseno alla Tunisia attraverso Pantelleria e Gozo. I vertici dei triangoli sono stati calcolati nelle loro coordinate ellissoidiche ed a partire da un vertice fondamentale (prima l'osservatorio di Genova e poi Monte Mario) ove erano state determinate λ e Φ astronomiche e l'azimut assoluto di un altro vertice. Una volta compensata la triangolazione fondamentale del primo ordine questa è

da ritenersi come l'ossatura indeformabile alla quale attaccare tutti i lavori geodetici e topografici. Ma se questa triangolazione è sufficiente agli alti scopi della geodesia, non così è per gli scopi pratici, data la grande distanza fra i vertici. Per rendere più frequenti i vertici si istituisce nella parte centrale di ogni triangolo del primo ordine un nuovo punto, detto di secondo ordine, il quale si ricollega tanto ai vertici del triangolo quanto ai punti del secondo ordine dei triangoli adiacenti.

Si ha così una rete trigonometrica del secondo ordine. Eseguite e compensate le triangolazioni di primo e secondo ordine, i punti noti sono ancora troppo scarsi perché bastino ad inquadrare i rilievi diretti del terreno e i lavori di delimitazione del Catasto. È proprio per ciò che furono determinate due nuove serie di punti detti del terzo e quarto ordine, di interesse puramente locale,

con gli ultimi generalmente non collegati fra loro in modo da dar luogo ad una rete continua di triangoli, ma riferiti a vertici precedentemente noti mediante intersezione diretta laterale o inversa.

Una rete parallela, assai diffusa sul territorio e attaccata ai vertici dei primi tre ordini è stata determinata in Italia anche dal Catasto; purtroppo molti dei relativi segnali sono andati perduti.

Le coordinate dei vertici dell'attuale rete nazionale di triangolazione (*sistema Monte Mario 1940*) sono caratterizzate da un'incertezza alquanto elevata, tipica delle metodologie classiche succitate.

Lo sviluppo della metodologia di posizionamento GPS, con relativa incertezza centimetrica, ha fatto sì che molti paesi del mondo, fra cui quelli europei, abbiano deciso di rilevare una rete di inquadramento GPS uniformemente distribuita sul territorio nazionale avente caratteristiche di alta precisione, non sostitutiva di quella precedente, ma tuttavia ad essa strettamente collegata.

Ciò per costituire un valido supporto geometrico ovvero per definire una rete che potremmo chiamare di *ordine zero*. L'Italia, attraverso l'Istituto Geografico Militare, ha varato un programma che ha portato nel 1995 ad avere quattro punti per ogni foglio alla scala 1:100000, per un totale di circa 1150 punti, così determinati: la distanza media fra ogni punto è di circa 20 km ed ogni vertice è accessibile con autovettura; il collegamento ai vertici esistenti del I, II e III ordine viene fatto con la metodologia vista a proposito della determinazione dei punti isolati, usando il teodolite giroscopico.

La nuova rete, uniforme perché avrà la medesima incertezza su ciascun vertice dalla Lombardia alla Sicilia, include, oltre ai vertici citati, i vertici in territorio nazionale appartenenti alla rete europea EUREF GPS e tutti quei punti costituenti stazioni VLBI (*"Very Long Baseline Interferometry"*) stazione SLR (*Satellite Laser Ranging*) o comunque inseriti in reti internazionali.

I vertici GPS sono collegati nella misura di circa il 50% ai capisaldi della rete di livellazione di alta precisione. Questo permette di conseguire il duplice scopo di collegare la rete GPS al sistema di riferimento altimetrico nazionale di alta precisione con circa 430 riattacchi altimetrici e di definire, per punti, il profilo geoidico lungo le linee di livellazione geometrica. È stata prevista anche la determinazione delle coordinate astronomiche in 215 punti in modo tale da conoscere la deviazione della verticale (differenza fra le coordinate astronomiche e quelle ellissoidiche), che unitamente a misure gravimetriche permette una miglior conoscenza del geoido stesso.

6.3 METODI DI RIATTACCO

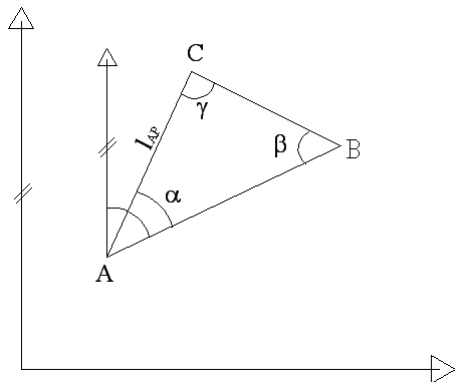
I metodi di riattacco servono per collegare i vertici di una rete di ordine inferiore a quelli di una rete di ordine superiore, ovvero, nel caso di una rete tecnica, a collegare punti incogniti a punti noti.

6.3.1 Intersezione in avanti

Si considera un piano di Gauss, facendo stazione con il teodolite sui punti noti A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) si vuol determinare la posizione del punto incognito P (cioè le coordinate x_P, y_P) per mezzo delle misure degli angoli α e β .

La distanza $\overline{AB} = c$ è nota perché determinabile per mezzo delle coordinate dei punti A e B:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (6.33)$$



ovvero in funzione dei coseni direttori

$$\overline{AB} = \frac{x_B - x_A}{\cos \vartheta_{AB}} = \frac{y_B - y_A}{\text{sen} \vartheta_{AB}}, \text{ noto}$$

$$\text{tg} \vartheta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Fra noti e misurati disponiamo quindi di 3 elementi (AB noto, α e β misurati). Gli elementi necessari e sufficienti per

individuare la posizione relativa dei 3 punti sono: $2n - 3 = 3$ (non si hanno quindi misure sovrabbondanti).

Avremo perciò (vedi figura):

$$l_{AP} = \frac{AB \cdot \text{sen} \beta}{\text{sen} \gamma} \Rightarrow l_{AP} = \frac{AB \cdot \text{sen} \beta}{\text{sen}(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{AB \cdot \text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad (6.34)$$

$$\vartheta_{AP} = \vartheta_{AB} - \alpha$$

e quindi possiamo calcolare le coordinate di P:

$$x_p = x_A + l_{AP} \cos \vartheta_{AP}$$

$$y_p = y_A + l_{AP} \text{sen} \vartheta_{AP}$$

Lo stesso calcolo può essere fatto utilizzando l'altro lato è evidente che il risultato deve essere uguale, perché non vi sono misure sovrabbondanti, e quindi non c'è possibilità di determinare gli

errori di misura e di fare una compensazione; se i risultati sono differenti, significa che è stato commesso un errore di calcolo (è quindi utile eseguire il calcolo seguendo le due vie).

Tutte le volte che si vogliono elementi di controllo delle operazioni svolte, non ci si limita ad eseguire intersezioni semplici, come quella descritta, ma si cerca di ottenere elementi in soprannumero rispetto a quelli strettamente necessari. Per esempio, rimanendo nello schema dell'intersezione in avanti, invece di fare stazione su due punti noti, possiamo fare stazione su tre punti noti (A, B, C), misurando 4 angoli. I lati \overline{AB} e \overline{BC} e l'angolo α sono noti perché possono essere calcolati utilizzando le coordinate note dei punti A, B, C. quindi, fra noti e misurati, si hanno 7 elementi, quelli necessari sono $2n - 3 = 5$ si hanno quindi 2 elementi sovrabbondanti. Utilizzando indifferentemente il metodo di compensazione basato sulle osservazioni condizionate o sulle osservazioni indirette si ottengono le loro varianze e la covarianza degli elementi compensati valutando, quindi, l'errore di posizione del punto.

6.3.2 Misure nel piano di Gauss

Se si utilizzano le coordinate gaussiane, si deve tenere presente che gli angoli misurati sulla superficie fisica sono angoli fra sezioni normali, questi possono essere considerati come angoli fra geodetiche essendo lo scostamento paragonabile alla precisione dello strumento (che nelle misure di angoli è dell'ordine del decimo di secondo 0,1").

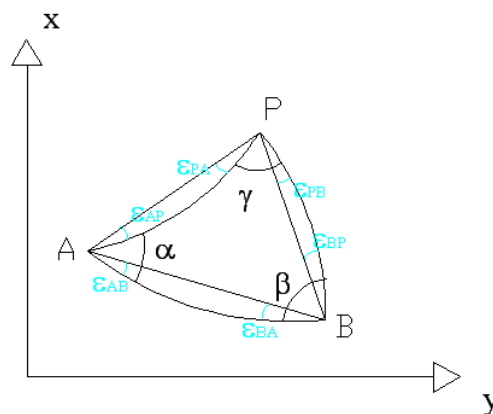
Gli angoli tra geodetiche a loro volta, essendo la proiezione di Gauss conforme, sono uguali agli angoli fra le trasformate piane delle geodetiche che sono contenute nel piano cartografico. In altre parole gli angoli misurati α e β sono angoli tra lati curvilinei.

Quello che si misura sul piano topografico sono le trasformate piane delle geodetiche, contenenti le deformazioni a seguito del passaggio dalla superficie ellissoidica al piano, gli angoli che sono quelli effettivi, poiché contengono gli *angoli di riduzione alla corde* calcolati in prima approssimazione con coordinate note; ad esempio:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{(x_A - x_B)(2y_A + y_B)}{6\rho_m N_m}$$

pertanto ogni angolo va corretto dell'angolo di riduzione procedendo per iterazione.

L'utilizzo delle coordinate gaussiane consente di prescindere da qualsiasi considerazione

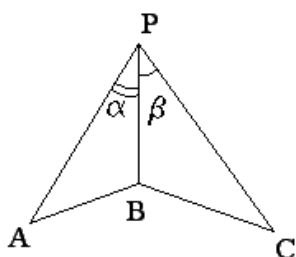


sull'estensione della zona da rilevare; cioè non ci sono ipotesi da formulare intorno al campo topografico o al campo geodetico, ma si esegue il semplice calcolo in prima e seconda approssimazione. L'utilizzo delle coordinate gaussiane è quindi vantaggiosa nei confronti delle geodetiche ortogonali (nelle quali eventualmente trasformiamo le geografiche), che possono essere considerate come cartesiane piane solo all'interno del campo topografico.

6.3.3 Intersezione laterale.

Il problema è sostanzialmente identico al precedente: l'unica differenza è che, invece di fare stazione sui due punti noti A e B, si fa stazione su un punto noto, per esempio A, e sul punto incognito P. il problema si risolve in maniera del tutto analoga al precedente; anche le osservazioni fatte possono essere ripetute senza modificazioni.

6.3.4 Intersezione indietro.



L'intersezione all'indietro si realizza facendo stazione con il teodolite nel punto incognito P e misurando i due angoli α e β definiti dalle tre direzioni che dal punto P vanno a tre vertici noti A, B, C.

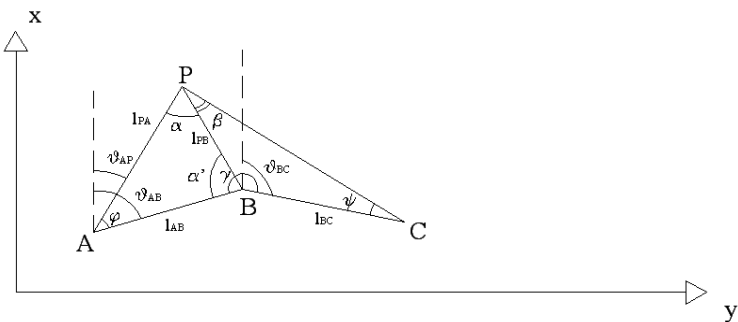
E' possibile risolvere detta intersezione con il metodo di Pothenot partendo dalle relazioni:

$$\operatorname{tg} \mathcal{G}_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \operatorname{tg} \mathcal{G}_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

da cui si può ricavare

$$\gamma = 180^\circ - \mathcal{G}_{AB} + \mathcal{G}_{BC}$$

Inoltre:



$$AB = \frac{x_B - x_A}{\cos \mathcal{G}_{AB}} = \frac{y_B - y_A}{\operatorname{sen} \mathcal{G}_{AB}}$$

$$BC = \frac{x_C - x_B}{\cos \mathcal{G}_{BC}} = \frac{y_C - y_B}{\operatorname{sen} \mathcal{G}_{BC}}$$

A questo punto è necessario determinare gli angoli φ e ψ , quindi dobbiamo scrivere due equazioni nelle due incognite φ e ψ , la prima è immediata:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

La seconda equazione si ottiene ricavandola con il teorema dei seni:

$$\overline{BP} = \overline{AB} \frac{\text{sen} \varphi}{\text{sen} \alpha}, \quad \overline{BP} = \overline{BC} \frac{\text{sen} \psi}{\text{sen} \beta},$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{sen} \varphi}{\text{sen} \psi} = K \text{ (quantità nota)}$$

Questa è la seconda equazione; per risolvere il sistema scriviamo la prima equazione in questa forma:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = M \text{ (quantità nota)}$$

e applichiamo alla seconda la regola del comporre e dello scomporre

$$\frac{\text{sen} \varphi - \text{sen} \psi}{\text{sen} \varphi + \text{sen} \psi} = \frac{K - 1}{K + 1}$$

Con le formule di prostaferesi si ottiene:

$$\frac{2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \text{sen} \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \text{sen} \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{K - 1}{K + 1}$$

da cui:

$$\text{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{K - 1}{K + 1} \text{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$$

Il secondo membro è quantità nota, per cui possiamo scrivere:

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = \text{arctg} \left(\frac{K - 1}{K + 1} \text{tg} M \right) = N \text{ (quantità nota)}$$

Quindi il nostro sistema si riduce a:

$$\begin{cases} \frac{\varphi + \psi}{2} = M \\ \frac{\varphi - \psi}{2} = N \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} \varphi = M + N \\ \psi = M - N \end{cases}$$

Determinati φ ψ possiamo, per esempio, ricavare il lato D:

$$\overline{AP} = \overline{AB} \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{\text{sen} \alpha}$$

e l'angolo di direzione \mathcal{G}_{AP} :

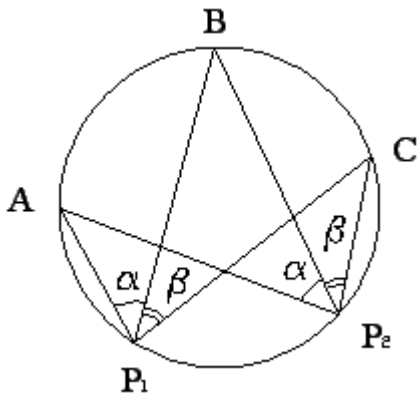
$$\mathcal{G}_{AP} = \mathcal{G}_{AB} - \varphi$$

per cui le coordinate di P risultano:

$$x_P = x_A + \overline{AP} \cos \mathcal{G}_{AP}$$

$$y_P = y_A + \overline{AP} \sin \mathcal{G}_{AP}$$

Anche in questo caso possiamo eseguire il calcolo partendo, invece che da A, da B o da C, ma solo per un controllo dei calcoli, perché non vi sono elementi sovrabbondanti: infatti, abbiamo cinque elementi, fra noti (AB BC e γ) e misurati (α e β), cioè il numero strettamente necessario e sufficiente ($2n - 3 = 5$).



Vanno poi ripetute le considerazioni fatte in merito all'utilizzo delle coordinate gaussiane.

In particolare problema è indeterminato se P appartiene alla circonferenza definita dai tre punti noti. È evidente, infatti, che se la posizione relativa del punto P rispetto ai tre punti noti è individuata dai due angoli α e β , è necessario che il punto P non appartenga a detta circonferenza poiché in tal caso vedrebbe i tre punti noti sotto gli stessi angoli α e β . Occorre

evitare anche formazioni prossime a quelle indeterminate, altrimenti l'errore di posizione del punto P potrebbe risultare molto grande.

Il metodo presenta dei vantaggi rispetto ai due precedenti: innanzitutto si fa stazione su un solo punto; in secondo luogo si fa stazione su un punto incognito che è un punto generalmente scelto dall'operatore e non sui punti noti (campanili, ecc.) sui quali molto spesso è difficile fare stazione (vedi anche stazione fuori centro). Come inconveniente vi è solo la necessità di avere tre punti noti invece di due, ma questo generalmente non rappresenta un problema.

6.3.5 Problema di Hansen

Dati due punti di coordinate note $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e due punti incogniti $P_3(x_3, y_3)$ e $P_4(x_4, y_4)$, da quest'ultimi si misurano gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Per la determinazione delle coordinate dei punti incogniti si utilizza il *Metodo della base fittizia*.

Si assume un valore arbitrario a d_1 e per via trigonometrica si ottiene il valore fittizio l_1 che rappresenta la distanza P_1P_2

$$\frac{d_1}{\text{sen}(\pi - \gamma - \beta)} = \frac{\overline{P_2 P_3}}{\text{sen} \beta} \Rightarrow \overline{P_2 P_3}$$

$$\frac{d_1}{\text{sen}(\pi - \alpha - \delta)} = \frac{\overline{P_1 P_3}}{\text{sen} \alpha} \Rightarrow \overline{P_1 P_3}$$

per il teorema di Carnot

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{P_1 P_3}^2 + \overline{P_3 P_2}^2 - 2\overline{P_1 P_3} \cdot \overline{P_3 P_2} \cos(\gamma - \delta) \Rightarrow$$

$$l_1 = \sqrt{\overline{P_1 P_2}^2}$$

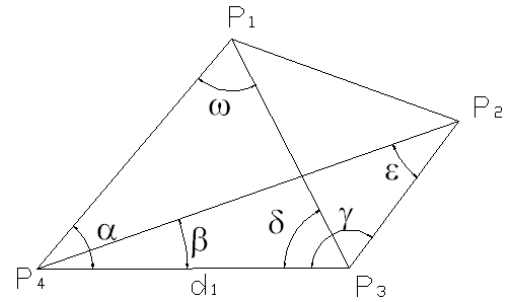
$$\overline{P_1 P_2}^* = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

rapportando i due valori si ottiene

$$\frac{\overline{P_1 P_2}^*}{\overline{P_1 P_2}} = r$$

da cui

$$d = \overline{P_3 P_4} = r d_1$$



6.3.6 Riduzione al centro di stazione

Si vogliono determinare le coordinate dei punti incogniti A e B misurati a partire dal vertice di coordinate note C . Nell'ipotesi che questo sia un punto inaccessibile si effettua stazione nel vertice S situato nei pressi del vertice noto conoscendo la distanza tra S e C . Il problema si risolve riportando le letture fatte da S a C .

$$\mathcal{G}_{SA} + \varepsilon = \mathcal{G}_{CA}$$

che rappresenta anche l'angolo esterno al triangolo di base SA e angoli al vertice ε e \mathcal{G}_{SA} .

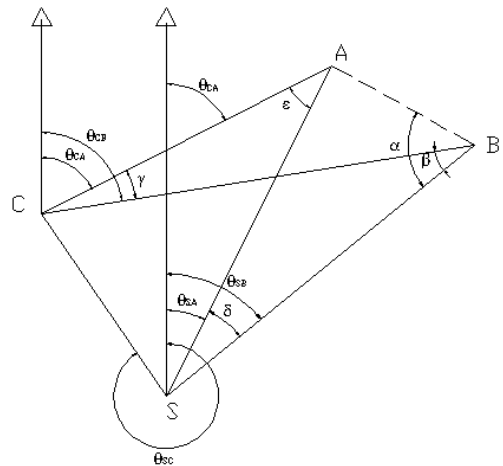
$$C\hat{S}B = 360 - \mathcal{G}_{SC} + \mathcal{G}_{SB}$$

Nota \overline{CS} e misurati \mathcal{G}_{SA} , \mathcal{G}_S , \mathcal{G}_{SC} , \overline{SA} , \overline{SB}

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 - 2\overline{SA}\overline{SB}\cos\delta$$

$$\frac{\overline{AS}}{\text{sen} \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen} \gamma}$$

da cui otteniamo α



$$\overline{CB}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{SB}^2 - 2\overline{CS}\overline{SB}\cos(\widehat{CSB})$$

inoltre

$$\frac{\overline{CS}}{\text{sen}\beta} = \frac{\overline{CB}}{\text{sen}(\widehat{CSB})}$$

da cui otteniamo β , pertanto

$$\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{CB}\overline{AB}\cos(\alpha - \beta)$$

visto che

$$\overline{CS}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{SA}\overline{CA}\cos(\varepsilon)$$

si ottiene

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{-\overline{CS}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{CA}^2}{2\overline{CS}\overline{SA}}\right)$$

Determinati ε e γ è facile determinare gli angoli di direzione in S.

6.3.7 Intersezione multipla

Si consideri un piano di Gauss, facendo stazione con il teodolite sui punti noti A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) e C (x_C, y_C) si vuole determinare la posizione del punto incognito P (x_P, y_P) per mezzo delle misure degli angoli α , β e γ .

La distanza \overline{AB} e quella BC sono note perché determinabili per mezzo delle coordinate dei punti

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

come anche noti sono gli angoli di direzione

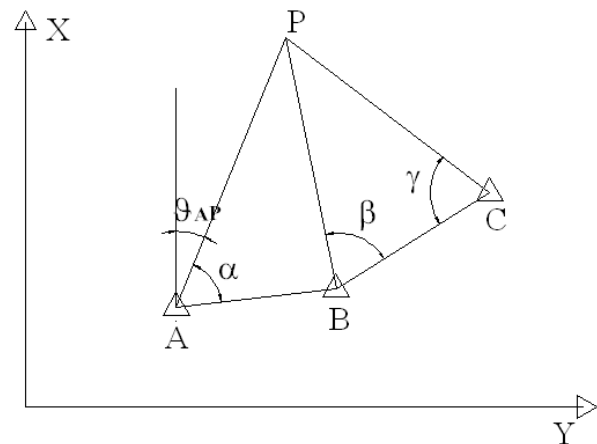
$\mathcal{G}_{AB}, \mathcal{G}_{BC}$ dati da

$$\text{tg } \mathcal{G}_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\text{tg } \mathcal{G}_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

e di conseguenza

$$\mathcal{G}_{AP} = \mathcal{G}_{AB} + \alpha$$



$$\mathcal{G}_{BP} = \mathcal{G}_{BC} + \beta \pm \pi$$

$$\mathcal{G}_{CP} = \mathcal{G}_{CB} + \gamma \pm \pi$$

Il numero di misure eseguite è maggiore di quelle strettamente necessarie, pertanto la soluzione è eseguita ai minimi quadrati. È possibile calcolare le coordinate approssimate di P mediante la risoluzione dell'intersezione sui soli vertici A e B.

L'equazione generatrice sarà del tipo

$$\mathcal{G}_{AP} - \mathcal{G}_{AP}^* = v$$

ed inoltre

$$\bar{\mathcal{G}}_{AP} - \mathcal{G}_{AP}^* = l$$

È possibile scrivere

$$\bar{\mathcal{G}}_{AP} = \frac{\bar{y}_P - y_A}{\bar{x}_P - x_A}$$

$$\mathcal{G}_{AP} = \frac{(\bar{y}_P + \delta y_P) - y_A}{(\bar{x}_P + \delta x_P) - x_A}$$

Svillupando in serie

$$\mathcal{G}_{AP} = \bar{\mathcal{G}}_{AP} + \delta y_P \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{AP}}{(\bar{x}_P - x_A)} - \delta y_P \frac{\cos^2 \bar{\mathcal{G}}_{AP} (\bar{y}_P - y_A)}{(\bar{x}_P - x_A)^2}$$

sapendo che

$$\overline{AP} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

ed inoltre

$$\overline{AP} = \frac{(\bar{x}_P - x_A)}{\cos \bar{\mathcal{G}}_{AP}} = \frac{(\bar{y}_P - y_A)}{\sin \bar{\mathcal{G}}_{AP}}$$

si ha

$$\mathcal{G}_{AP} = \bar{\mathcal{G}}_{AP} + \delta y_P \frac{\cos \bar{\mathcal{G}}_{AP}}{\overline{AP}} - \delta y_P \frac{\sin \bar{\mathcal{G}}_{AP}}{\overline{AP}}$$

L'equazione generata è:

$$\bar{\mathcal{G}}_{AP} + a \delta y_P - b \delta y_P - \mathcal{G}_{AP}^* = v \Rightarrow a \delta y_P - b \delta y_P + l = v$$

È possibile scrivere una equazione generata per ogni vertice trigonometrico (nel caso in figura esistono tre vertici noti e quindi ci saranno tre equazioni). La soluzione è quella già mostrata in forma matriciale nel paragrafo 4.3.2.1.

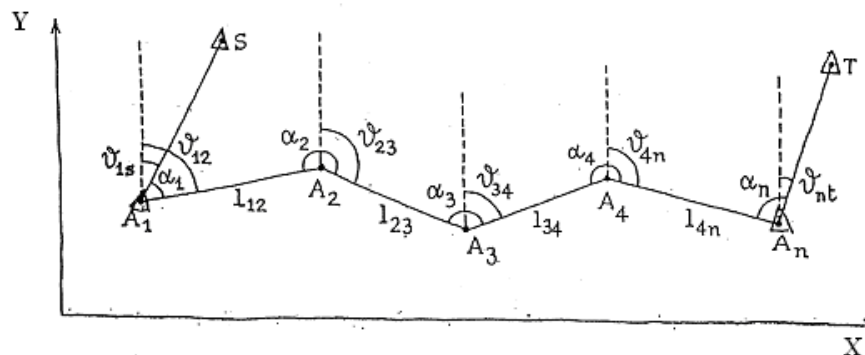
6.3.8 Poligonalali

L'insieme dei punti di una triangolazione non è in generale, specialmente per i rilievi di grande scala, sufficiente per appoggiare ad esso il rilievo di dettaglio, ma occorre una fase intermedia con lo scopo di infittire i punti di coordinate note a cui appoggiare il rilievo di dettaglio.

Si definiscono *poligonalali* i collegamenti effettuati tra una serie di punti attraverso spezzate i cui vertici saranno i punti del rilievo di dettaglio. Tali poligonalali sono rilevate misurando le lunghezze dei lati e gli angoli che i lati formano tra loro. Possono essere di due tipi: poligonalali aperte e poligonalali chiuse. Quelle aperte si usano per il raffittimento dei vertici della triangolazione e quindi in generale per un rilievo da inserire in un sistema di riferimento preesistente; queste ultime devono essere appoggiate ad un certo numero di vertici di coordinate note sia per il calcolo che per il controllo e la compensazione delle misure. Le poligonalali chiuse invece servono per rilievi fini a se stessi (rilievo di un fondo, di un isolato, etc.); ed essendo chiuse hanno in se stesse gli elementi per il controllo e la compensazione delle misure e non sono, in generale, riferite ad un rilievo preesistente.

6.3.8.1 Poligonale aperta

La poligonale aperta deve essere inquadrata in un più largo rilievo preesistente ed i suoi vertici devono quindi essere collegati ad un sistema di punti di coordinate note (vertici di triangolazione o punti riattacati alla triangolazione); il sistema di riferimento da considerarsi è piano.



Per il calcolo della poligonale sono necessari e sufficienti due punti noti, ma in generale, per avere elementi di controllo e di compensazione delle misure, ci si collega a quattro punti di coordinate note, si inizia dal lato che ha per estremi i due punti di coordinate note.

Si suppone di essere in un piano X,Y in cui si considerano i punti S e T vertici di triangolazione i punti A_1, A_n sono noti in quanto riattaccati alla triangolazione. Si misurano gli angoli azimutali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e le lunghezze dei lati $l_{12}, \dots, l_{n-1,n}$. Si calcola tramite le coordinate dei vertici noti gli angoli di direzione \mathcal{G}_{S1} (gli angoli di direzione sono calcolati in senso orario rispetto alla direzione parallela all'asse y scelto) e \mathcal{G}_{nT} :

$$\operatorname{tg} \bar{\mathcal{G}}_{S1} = \frac{y_S - y_1}{x_S - x_1} \quad \operatorname{tg} \bar{\mathcal{G}}_{nT} = \frac{y_T - y_n}{x_T - x_n}$$

Si calcola gli angoli di direzione

$$\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_{S1} + \alpha_1$$

$$\mathcal{G}_{23} = \mathcal{G}_{12} + \alpha_2 \pm \pi$$

.....

$$\mathcal{G}_{nT} = \mathcal{G}_{n-1,n} + \alpha_n \pm \pi = \mathcal{G}_{S1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i + k\pi$$

con K deducibile dal numero di vertici, si nota che questo \mathcal{G}_{nT} differirà dall'angolo noto a priori $\bar{\mathcal{G}}_{nT}$ di una quantità detta *errore di chiusura angolare* Δ , che dipende evidentemente dagli errori accidentali commessi nelle misure degli angoli:

$$\Delta = \mathcal{G}_{nT} - \bar{\mathcal{G}}_{nT}$$

Questo errore è accettabile, se rientra nei limiti di tolleranza:

$$t_{\Delta} = 3\sigma_{\alpha} \sqrt{n}$$

dove σ_{α} è l'errore di misura angolare dipendente dallo strumento, dai segnali usati, dal metodo, dalla morfologia del terreno, ecc; n rappresenta il numero di vertici della poligonale (\sqrt{n} perché la legge degli errori è di tipo quadratico).

La σ_{α} assume diversi valori in funzione del tipo di poligonale:

- $\sigma_{\alpha} = \pm 5''$ nel caso di poligonale geodetica (ovvero che collega punti a vertici della rete d'inquadramento e ricopre diversi km)

- $\sigma_\alpha = \pm 10''$ nel caso di poligonale topografica con precisione centimetrica (utilizzata per punti aventi coordinate di precisione dello stesso ordine)
- $\sigma_\alpha = \pm 1'$ nel caso di poligonale ordinaria (utilizzata nei cantieri con scarsa precisione, decimetrica, e per estensione di pochi km)

Calcolato Δ si confronta con t_Δ , se $\Delta \leq t_\Delta$ si procede con la compensazione angolare in cui si correggono gli α_i ottenendo il valore compensato $\alpha_i^* = \alpha_i - \frac{\Delta}{n}$.

Compensati gli angoli, si ricalcolano gli angoli di direzione \mathcal{G}_{ij}^* :

$$\mathcal{G}_{12}^* = \mathcal{G}_{S1} + \alpha_1^*$$

.....

$$\mathcal{G}_{n-1,n}^* = \mathcal{G}_{n-2,n-1} + \alpha_{n-1}^* \pm \pi$$

e successivamente le coordinate dei vertici:

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + l_{12} \cdot \text{sen } \mathcal{G}_{12}^* \\ x_2 = x_1 + l_{12} \cdot \text{cos } \mathcal{G}_{12}^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = y_2 + l_{23} \cdot \text{sen } \mathcal{G}_{23}^* = y_1 + l_{12} \cdot \text{sen } \mathcal{G}_{12}^* + l_{23} \cdot \text{sen } \mathcal{G}_{23}^* \\ x_3 = x_2 + l_{23} \cdot \text{cos } \mathcal{G}_{23}^* = x_1 + l_{12} \cdot \text{cos } \mathcal{G}_{12}^* + l_{23} \cdot \text{cos } \mathcal{G}_{23}^* \end{cases}$$

.....

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + l_{n-1,n} \cdot \text{sen } \mathcal{G}_{n-1,n}^* = y_1 + \sum_{i=1}^n l_{i-1,i} \text{sen } \mathcal{G}_{i,i+1}^* \\ x_n = x_{n-1} + l_{n-1,n} \cdot \text{cos } \mathcal{G}_{n-1,n}^* = x_1 + \sum_{i=1}^n l_{i-1,i} \text{cos } \mathcal{G}_{i,i+1}^* \end{cases}$$

Le coordinate dell'ultimo vertice A_n dette x_n, y_n , saranno confrontate con quelle note \bar{x}_n, \bar{y}_n da considerarsi prive di errore; vi sarà certamente una differenza causata dagli errori nelle misure data da:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^n l_{i-1,i} \text{cos } \mathcal{G}_{i,i+1}^* - (x_n - x_1)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n l_{i-1,i} \text{sen } \mathcal{G}_{i,i+1}^* - (y_n - y_1)$$

La quantità $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ prende il nome di *errore di chiusura lineare* che comprende l'errore sulle lunghezze e parte di quello di misura degli angoli compensati. Occorre verificare se tale

errore è accettabile, cioè stabilire una tolleranza. Esiste a tal proposito una formula empirica i cui coefficienti sono ricavati su base statistica:

$$t_l = a\sqrt{L} + bL + c\sqrt{n}$$

$$\text{con } a \cong 3 \frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}$$

il primo termine tiene conto degli errori accidentali nella misura delle distanze, il secondo di quelli sistematici e il terzo degli errori accidentali nelle misure angolari; nella formula L è la lunghezza totale della poligonale e n il numero di vertici della poligonale (e quindi degli angoli misurati) e l la lunghezza di ogni singolo lato.

Nelle poligonali catastali b varia in funzione della natura del terreno:

- $b=0.015$ in terreni facili
- $b=0.020$ in terreni medi
- $b=0.025$ in terreni difficili

mentre $c = 0.008$

Se $\Delta l \leq t_l$, si può eseguire la *compensazione lineare della poligonale* di tipo empirico con le correzioni da apportare:

$$\delta_x(x_i - x_{i-1}) = -\frac{\Delta x}{\sum_{i=1}^{n-1} l_{i-1,i}}$$

$$\delta_y(y_i - y_{i-1}) = -\frac{\Delta y}{\sum_{i=1}^{n-1} l_{i-1,i}}$$

Si ricaveranno, quindi le proiezioni compensate

$$(l_{i-1,i} \cos \mathcal{G}_{i,i+1}^*)_c = l_{i-1,i} \cos \mathcal{G}_{i,i+1}^* + \delta_x l_{i-1,i}$$

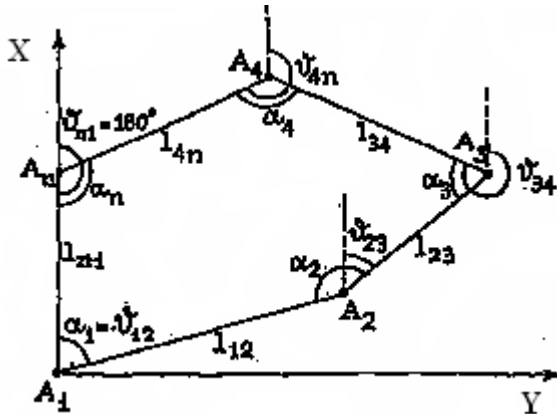
$$(l_{i-1,i} \text{sen} \mathcal{G}_{i,i+1}^*)_c = l_{i-1,i} \text{sen} \mathcal{G}_{i,i+1}^* + \delta_y l_{i-1,i}$$

da cui si ricavano le coordinate compensate

$$\begin{cases} y_i = y_{i-1} + (l_{i-1,i} \cdot \text{sen} \mathcal{G}_{i-1,i}^*)_c \\ x_i = x_{i-1} + (l_{i-1,i} \cdot \cos \mathcal{G}_{i-1,i}^*)_c \end{cases}$$

Qualora gli errori di chiusura siano maggiori delle tolleranze bisogna ripetere le misure.

6.3.8.2 Poligonale chiusa



Le poligonali chiuse sono autocompensabili, cioè non presuppongono la conoscenza di nessun vertice trigonometrico noto. Si usano quando il rilievo è fine a se stesso, non deve cioè essere inserito in un rilievo preesistente. Si può quindi assumere un sistema di riferimento arbitrario per comodità si sceglie l'orientamento sull'ultimo lato, facendo

coincidere l'asse delle Y con la direzione dell'ultimo lato della poligonale (punti: A_1, A_n).

La prima compensazione sarà quella angolare ovvero si imporrà:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi = 0$$

dove n è il numero di lati della poligonale. Tuttavia a causa degli errori di misura tale differenza sarà pari ad un *errore di chiusura angolare*:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi = \Delta$$

Questa differenza Δ dovrà rientrare nei limiti di tolleranza già fissati per la poligonale aperta. Per la compensazione si potranno correggere direttamente gli angoli misurati α_i , di una quantità pari a Δ/n .

Una volta compensati gli angoli si calcolano gli angoli di direzione \mathcal{G}_{ij} a partire dal secondo lato della poligonale A_1A_2 (essendo il primo coincide ovviamente con α_1),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{12} &\equiv \alpha_1 \\ \mathcal{G}_{23} &= \mathcal{G}_{12} + \alpha_2 - \pi = \alpha_1 + \alpha_2 - \pi \\ \mathcal{G}_{34} &= \mathcal{G}_{23} + \alpha_3 - \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

L'ultimo angolo di direzione \mathcal{G}_{n1} dovrà essere uguale a π , per come è stato posizionato l'ultimo lato della poligonale. Calcolati i \mathcal{G} si calcolano le coordinate dei vertici con le formule viste nella poligonale aperta; tenendo ora presente che, per il sistema di riferimento assunto, risulta (punto A_1 coincidente col sistema di riferimento x,y):

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

si otterranno per i vari vertici:

$$\begin{cases} y_2 = l_{12} \cdot \cos \vartheta_{12} \\ x_2 = l_{12} \cdot \sin \vartheta_{12} \\ y_3 = y_2 + l_{23} \cdot \cos \vartheta_{23} = l_{12} \cdot \cos \vartheta_{12} + l_{23} \cdot \cos \vartheta_{23} \\ x_3 = x_2 + l_{23} \cdot \sin \vartheta_{23} = l_{12} \cdot \sin \vartheta_{12} + l_{23} \cdot \sin \vartheta_{23} \end{cases}$$

.....

Le coordinate del punto A_1 (che si trova nell'origine del sistema di riferimento), a causa degli errori di misura, non saranno uguali a zero, ma a certe quantità Δx e Δy diverse da zero. L'errore di chiusura lineare sarà:

$$\Delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

e dovrà essere inferiore ai limiti di tolleranza già fissati per la poligonale aperta: $\Delta \leq t_{\Delta}$. Anche la compensazione si esegue con il metodo empirico già visto per la poligonale aperta.

6.3.8.3 Precisione conseguibile nelle poligonali

In una poligonale aperta partendo dal primo punto noto le espressioni delle coordinate del primo vertice incognito A_2 saranno:

$$\begin{cases} Y_2 = Y_1 + l_{12} \cdot \cos \vartheta_{12} = Y_1 + l_{12} \cdot \cos(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \\ X_2 = X_1 + l_{12} \cdot \sin \vartheta_{12} = X_1 + l_{12} \cdot \sin(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \end{cases}$$

L'errore di posizione del vertice è un numero aleatorio di media nulla e di varianza σ_{ε}^2 ; data da

$$\sigma_{\varepsilon} = \pm \sqrt{\sigma_{x2}^2 + \sigma_{y2}^2};$$

in cui si trascura la covarianza e l'errore su x_1, y_1 e ϑ_{1s} essendo noti. E' facile verificare per la legge di distribuzione della varianza che:

$$\begin{cases} \sigma_{x_2}^2 = \cos^2(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \cdot \sigma_l^2 + l_{12}^2 \cdot \sin^2(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \cdot \sigma_{\alpha}^2 \\ \sigma_{y_2}^2 = \sin^2(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \cdot \sigma_l^2 + l_{12}^2 \cdot \cos^2(\vartheta_{1s} + \alpha_1) \cdot \sigma_{\alpha}^2 \end{cases} \quad (6.35)$$

In maniera analoga possiamo ricavare l'espressione dell'errore di posizione dei vertici successivi, che naturalmente risulterà sempre maggiore, perché interviene un numero sempre più elevato di elementi misurati.

Sostituendo nella (6.35) dei valori notevoli si può valutare l'errore di propagazione; si suppone, infatti, che: $l_{12} = 100m$; $\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_{1S} + \alpha_1 = 45^\circ$ e che lo strumento sia di scarsa precisione con:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \pm 30'' \sqrt{2} \\ \sigma_l = \pm 20cm \end{cases}$$

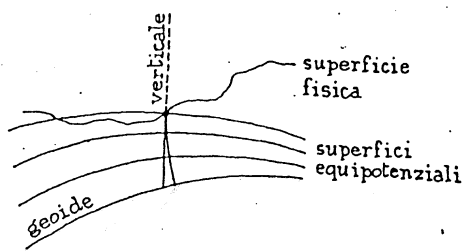
per $n=2$ (numero vertici) si ha:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \left(200 + \frac{9}{4}\right)cm^2 \cong 202cm^2 \Rightarrow \sigma_e = \pm \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \cong \pm 20cm$$

utilizzando, pertanto, uno strumento di scarsa precisione si avrà una precisione molto bassa nella poligonale ordinaria. Errori di questo genere non sono ammissibili per una carta in scala 1:1000 in cui l'errore di graficismo è pari proprio a $20cm$, per renderlo accettabile bisognerà aumentare la precisione dello strumento.

L'imprecisione si propaga su tutti i vertici, se pertanto si volessero collegare i vertici di ordine superiore, avendo la poligonale aperta un'estensione massima di 2÷3 km, sarà necessario suddividere il percorso in più parti compensate singolarmente. Anche la lunghezza dei lati di una poligonale non deve superare i $100m$.

6.4 RILIEVO ALTIMETRICO

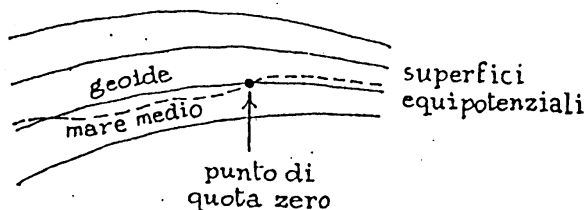


Per altezza o quota di un punto della superficie fisica sul geoide, o come normalmente si dice sul livello del mare, si intende il segmento di linea di forza del campo della gravità passante per tale punto e compreso fra esso e il geoide. Per la piccola curvatura della linea di forza si può anche dire che la quota è rappresentata dalla

distanza del punto dal geoide, misurata secondo la verticale per il punto stesso.

Tutte le operazioni volte alla determinazione delle quote dei punti, o più spesso delle differenze

di quota tra i punti, prendono il nome di livellazione.



Il punto a quota zero, da assumere come riferimento per tutte le quote è normalmente un punto del livello medio del mare, cioè quel livello cui il mare si avvicina nel corso

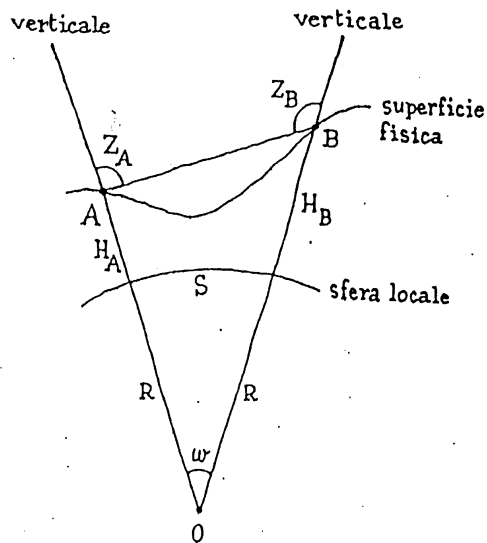
dell'anno, quando si prescinde da moti ondosi, dalle maree, dalle correnti e da ogni altro fenomeno transitorio.

Una suddivisione schematica delle livellazioni può essere fatta in base agli strumenti adottati, essendo i metodi correlati agli strumenti. Vi sono livellazioni che richiedono la preventiva determinazione o la conoscenza della distanza tra i punti tra cui si richiede il dislivello, altre che prescindono da ciò.

- Livellazioni indipendenti dalla distanza
 1. *livellazione geometrica*, che utilizza il livello a cannocchiale, le stadie, un eventuale micrometro a lamina piano parallela e vari accessori.
 2. *livellazione idrostatica*, che prevede l'utilizzo di sistemi a vasi comunicanti e sfrutta il principio che in questi vasi il pelo libero si dispone lungo una superficie equipotenziale.
 3. *livellazione barometrica*, che è basata sul principio che il dislivello fra due punti relativamente vicini sulla superficie terrestre è funzione della pressione e in parte della temperatura di un loro intorno.
- Livellazioni dipendenti dalla distanza
 1. *livellazione tacheometrica o distanziometrica*, che utilizza il teodolite ed un distanziometro ad onde.
 2. *livellazione trigonometrica*, che utilizza il teodolite e un distanziometro di grande portata, ma più spesso sfrutta la misura indiretta della distanza o la sua conoscenza a priori e prevede la stima della rifrazione.
 3. *livellazione ecclimetrica*, che prevede l'utilizzo di un ecclimetro e cioè di un goniometro in grado di misurare angoli in un piano verticale e la misura diretta o indiretta della distanza.

6.4.1 Livellazione trigonometrica

Nella livellazione trigonometrica si considera come superficie di riferimento la sfera locale, in quanto la distanza fra A e B non supera mai la decina di Km e la superficie fisica della terra, su cui si trovano i due punti A e B dei quali si vuole appunto determinare la differenza di quota.



Si hanno due punti A e B reciprocamente visibili e fra cui è nota la distanza S misurata sulla sfera locale e si misurano Z_A e Z_B , che sono rispettivamente le *distanze zenitali* reciproche dei due punti A e B. Il raggio della sfera locale è pari a $R = \sqrt{\rho N}$, dove il raggio del meridiano e la gran-normale vanno calcolati per una latitudine intermedia fra quelle dei punti A e B.

Si fa inoltre l'ipotesi che le verticali per i due punti coincidano con le normali alla sfera locale, e che gli strumenti utilizzati per la misura delle distanze

inviano raggi luminosi rettilinei (senza curvature).

Con H_A e H_B indichiamo rispettivamente le quote di A e di B misurate rispetto alla sfera locale.

Facendo uso del teorema dei seni applicato al triangolo che ha per lati la retta che congiunge A con B, il lato $(H_A + R)$, il lato $(H_B + R)$; si ottengono le relazioni, (con ω angolo formato tra le due verticali passanti per i due punti):

$$\frac{R + H_B}{R + H_A} = \frac{\text{sen}(\pi - Z_A)}{\text{sen}(\pi - Z_B)} = \frac{\text{sen}Z_A}{\text{sen}Z_B}$$

per la regola del comporre e dello scomporre

$$\frac{R + H_B - R - H_A}{R + H_B + R + H_A} = \frac{\text{sen}Z_A - \text{sen}Z_B}{\text{sen}Z_A + \text{sen}Z_B}$$

e dalle formule di Prostaferesi

$$H_B - H_A = (2R + H_A + H_B) \cdot \frac{2\text{sen}\frac{Z_A - Z_B}{2} \cos\frac{Z_A + Z_B}{2}}{2\text{sen}\frac{Z_A + Z_B}{2} \cos\frac{Z_A - Z_B}{2}}$$

si ottiene:

$$H_B - H_A = 2R \cdot \left(1 + \frac{H_A + H_B}{2R}\right) \cdot \text{tg}\frac{Z_A - Z_B}{2} \cot g\frac{Z_A + Z_B}{2};$$

sapendo che

$$Z_A = \pi + \omega - Z_B \quad \omega = \frac{S}{R}$$

$$\cot g \frac{Z_A + Z_B}{2} = \cot g \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cong -\frac{\omega}{2}$$

per cui risulta: $\cot g \frac{Z_A + Z_B}{2} \cong -\frac{S}{2R}$; quindi considerando la quota media tra i due punti, e ricordando che $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$, si può ottenere l'espressione del dislivello in funzione delle due distanze zenitali, procedendo così:

$$\begin{aligned} H_B - H_A &= 2R \cdot \left(1 + \frac{H_A + H_B}{2R} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{Z_A - Z_B}{2} \cot g \frac{Z_A + Z_B}{2} = 2R \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{Z_A - Z_B}{2} \left(-\frac{S}{2R} \right) \\ H_B - H_A &= S \cdot \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{Z_B - Z_A}{2} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Per determinare H_m si può procedere con un calcolo di prima e di seconda approssimazione, cioè porre prima $H_m = H_A$, calcolare un valore approssimato di H_B e quindi $H_m = \frac{H_A + H_B}{2}$.

Si potrebbe pensare che la preventiva conoscenza della distanza sulla sfera sia superflua in quanto calcolabile tramite la formula:

$$S = \omega R = (Z_A + Z_B - \pi) \cdot R ;$$

tuttavia lo scarto quadratico medio che caratterizza la misura delle distanze zenitali è al più circa pari a 2", mentre ω è dedotto con uno scarto quadratico medio dell'ordine di 3" e la distanza S così ricavata avrebbe uno s.q.m. dell'ordine del centinaio di metri, troppo grande per essere tollerato.

6.4.1.1 Livellazione con misura di una sola distanza zenitale

Ammettiamo di poter misurare una sola distanza zenitale, e sia essa Z_A ricordando che $Z_B = \pi + \omega - Z_A$ e inoltre che $\omega = S/R$ è possibile scrivere :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{Z_B}{2} - \frac{Z_A}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{Z_A}{2} - \frac{Z_A}{2} \right) = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \left(Z_A - \frac{\omega}{2} \right) \right]$$

che sostituito nella (6.29) da:

$$\begin{aligned} H_B - H_A &= S \cdot \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{Z_B - Z_A}{2} = S \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \left(Z_A - \frac{\omega}{2} \right) \right] \\ H_B - H_A &= S \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cot g \left(Z_A - \frac{S}{2R} \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

l'ultima delle quali fornisce il dislivello in funzione della sola distanza zenitale misurata in A.

6.4.1.2 Influenza della rifrazione atmosferica

Le linee di vista AB ottenute collimando B da A e A da B non sono rette bensì curve a causa della rifrazione atmosferica: Pertanto le distanze zenitali misurate non saranno Z_A e Z_B bensì φ_A e φ_B tali che:

$$\begin{aligned} Z_A &= \varphi_A + \varepsilon_A \\ Z_B &= \varphi_B + \varepsilon_B \end{aligned} \quad (6.37)$$

La linea di vista attraversa differenti strati di atmosfera ed è, pertanto, possibile approssimare tale traiettoria ad un arco di circonferenza di raggio r con angolo al centro pari a δ , con concavità rivolta all'interno della terra.

Se si uniscono con una corda i due punti A e B e se per essi si fa passare l'arco di circonferenza (traiettoria dei raggi luminosi) di raggio r , si può con ottima approssimazione supporre, vista la piccola curvatura dell'arco di circonferenza ($r \cong 7 \div 8R$) su distanze contenute, che gli angoli formati tra la corda e le tangenti nei due punti alla circonferenza sono uguali: $\varepsilon_A = \varepsilon_B \equiv \varepsilon$

Per valutare ε si considera il triangolo formato dalla corda AB e dai due raggi r (raggi che ovviamente sono perpendicolari alle due tangenti nei punti A e B alla circonferenza) per esso si ha:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} = \frac{AB}{2r}$$

posto

$$AB \cong s \Rightarrow \varepsilon \cong \frac{S}{2r} \quad (6.38)$$

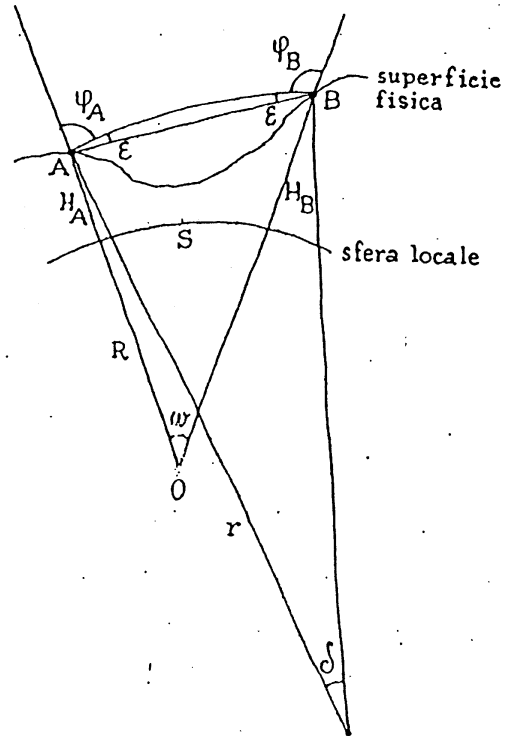
Il coefficiente di rifrazione atmosferica è per definizione pari a:

$$k = \frac{R}{r}$$

dalla (6.38) moltiplicando e dividendo per R si ottiene:

$$\varepsilon = \frac{S}{2r} \frac{R}{R} \Rightarrow \varepsilon = \frac{Sk}{2R}$$

Sostituendo nella (6.35) le (6.37) si ha:



$$H_B - H_A = S \cdot \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2}$$

In detta misurazione la formula è sostanzialmente uguale alla precedente a meno dell'aver considerato le distanze zenitali effettive φ_A e φ_B nell'ipotesi però che $\varepsilon_A = \varepsilon_B$.

Misurando invece una sola distanza zenitale, si ha:

$$H_B - H_A = S \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \operatorname{cot} g \left(\varphi_A + \varepsilon - \frac{S}{2R}\right) = S \left(1 + \frac{H_m}{R}\right) \cdot \operatorname{cot} g \left(\varphi_A - \frac{1-K}{2R} S\right) \quad (6.39)$$

Per brevi distanze la correzione angolare $\frac{1-K}{2R} S$ è sufficientemente piccola pertanto sviluppando in serie di Taylor e trascurando i quadrati e le potenze superiori si ha:

$$\operatorname{cot} g \left(\varphi_A - \frac{1-K}{2R} S\right) = \operatorname{cot} g \varphi_A + \frac{\frac{1-K}{2R} S}{\operatorname{sen}^2 \varphi_A} + \dots$$

inoltre essendo $\varphi_A \cong \frac{\pi}{2}$ si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi_A \approx 1 \quad 1 + \frac{H_m}{R} \approx 1$$

che sostituito nella (6.39) fornisce:

$$H_B - H_A \cong S \cdot \left(\operatorname{cot} g \varphi_A + \frac{1-K}{2R} S\right)$$

Introducendo l'angolo α complementare dell'angolo φ si ha infine:

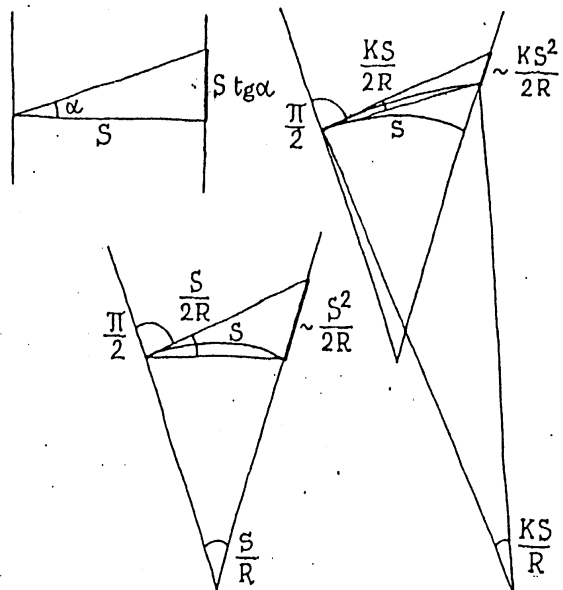
$$H_B - H_A \cong S \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-K}{2R} S^2 \quad (6.40)$$

Le altezze introdotte sono depurate dell'altezza dello strumento a e del segnale sul punto collimato. considerando quest'ultime si ha:

$$H_B - H_A \cong S \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{S^2}{2R} - \frac{K}{2R} S^2 + a - b$$

Il dislivello totale è la somma di tre termini che possono essere considerati come la sovrapposizione di tre effetti indipendenti:

- Il primo termine è pari al dislivello nel caso di due punti che si trovano a quote diverse e le cui proiezioni giacciono sul piano (quindi

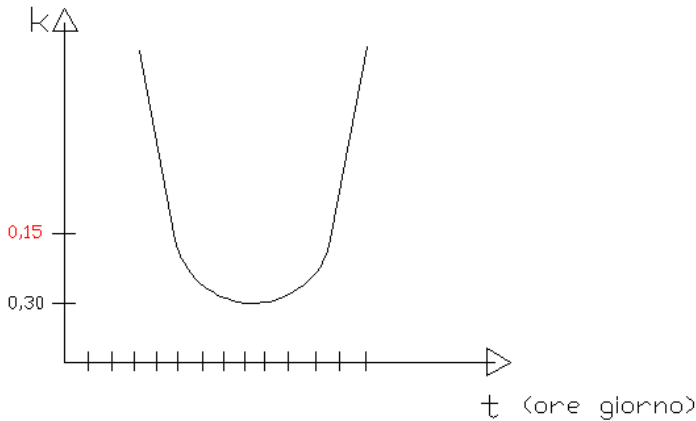


termine esatto da solo, solamente nel caso in cui i punti siano molto vicini);

- il secondo termine tiene conto del fatto che la superficie di riferimento per i due punti non è piana ma presenta una certa curvatura (i punti proiettati giacciono quindi sulla sfera locale) e tende a zero quando R tende all'infinito;
- l'ultimo termine negativo tiene conto della curvatura che assumono i raggi luminosi nelle loro traiettorie, a causa della rifrazione atmosferica i quali curvandosi tendono ad arrivare in punti sempre più bassi.

6.4.1.3 Determinazione del coefficiente di rifrazione

Il coefficiente di rifrazione varia da luogo a luogo e per uno stesso luogo varia con il tempo dipendendo dalla densità dell'aria e dalla temperatura e pressione. Esistono tabelle che forniscono il valore di K al variare delle condizioni atmosferiche, i valori più alti del coefficiente di



rifrazione si hanno d'inverno (può raggiungere valori massimi di 0,30), quelli più bassi d'estate. Il valore medio di k varia da 0,12÷0,16. I valori di K ricavati da grafici o tabelle non sono sufficientemente precisi per distanze superiori a 4\5 Km conviene a questo punto determinare sperimentalmente il suo valore.

Per il calcolo di K, se è a priori noto un dislivello $H_B - H_A$, si può calcolare K mediante la formula:

$$H_B - H_A = S \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cdot \cot g \left(\varphi_A + \varepsilon - \frac{S}{2R} \right) = S \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) \cdot \cot g \left(\varphi_A - \frac{1-K}{2R} S \right)$$

misurando solamente la distanza zenitale φ_A .

Se il dislivello tra i due punti non è noto a priori, si ricorre al metodo delle misure contemporanee di distanze zenitali reciproche:

$$Z_A + Z_B = \pi + \omega \quad \omega = \frac{S}{R} \rightarrow Z_A + Z_B = \pi + \frac{S}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{KS}{2R}$$

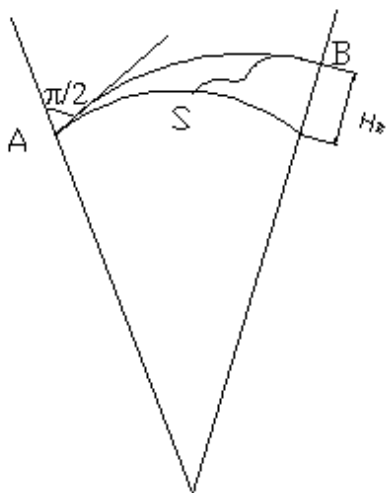
quindi

$$\varphi_A + \frac{KS}{2R} + \varphi_B + \frac{KS}{2R} = \pi + \frac{S}{R}$$

$$\frac{KS}{R} = \pi + \frac{S}{R} - \varphi_A - \varphi_B \rightarrow K = 1 - \frac{R}{S}(\varphi_A + \varphi_B - \pi)$$

6.4.1.4 Problema del faro

Permette di determinare utilizzando la (6.36) su distanze molto ridotte, in modo inverso, la distanza massima alla quale si può apprezzare un certo dislivello.



Si supponga di disporsi sulla superficie del mare in un punto A posto a distanza S da B sulla superficie terrestre. Si può calcolare l'altezza di B affinché da questo sia visibile A

$$H_A = 0$$

$$\alpha = 0$$

B può essere considerato appartenente alla superficie passante per A avente in questo tangente nulla.

$$H_B = \frac{1-k}{2R} S^2 \Rightarrow S = \sqrt{H_B 2R \left(\frac{1}{1-k} \right)}$$

assunto $k=0,20$ (valore medio notturno) si hanno i seguenti valori:

H_B (m)	10	30	100	300	1000
S (km)	13	22	40	60	126

6.4.2 Precisione della livellazione trigonometrica

Per la valutazione dell'errore nel calcolo del dislivello, facciamo riferimento alla formula semplificata:

$$\Delta_{AB} = H_B - H_A = S \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-K}{2R} S^2$$

Si può ritenere, per distanze non troppo elevate, che il secondo termine sia piccolo e così anche il suo contributo all'errore, per la legge di propagazione della varianza si ha:

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial S}\right)^2 \cdot \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sigma_S^2 + \left(\frac{S}{\cos^2 \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2}$$

Conviene a questo punto considerare l'errore relativo σ_r : cioè l'errore che si commette per ogni Km di distanza S:

$$\sigma_S = S \cdot \sigma_r$$

$$\sigma_{\Delta_{AB}} = \pm S \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sigma_r^2 + \left(\frac{1}{\cos^4 \alpha}\right) \cdot \sigma_\alpha^2}$$

per ogni km si ha

$$\sigma_r = \pm 10^{-5} \text{ (1cm/Km)}$$

$$\sigma_\alpha \pm 2''$$

Inoltre c'è da notare che la quantità sotto radice influisce poco sull'entità dell'errore, per cui esprimendo l'errore mettendo in evidenza S fuori al segno di radice, abbiamo:

$$\sigma_{\Delta} = \pm S \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sigma_r^2 + \left(\frac{1}{\cos^4 \alpha}\right) \cdot \sigma_\alpha^2} \cong \pm 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot S \quad (\text{cioè } 1,2 \text{ cm / Km}) \quad (6.42)$$

si può affermare che l'errore sul dislivello è praticamente proporzionale alla distanza. Si può inoltre vedere, facendo delle prove mettendo dei valori reali, che gli errori nelle misure zenitali, *pesano* maggiormente che degli errori dovuti alle misure di lunghezza; infatti, detti a e b due valori tali che sia $a < b$, si ha:

$$\sigma_{\Delta} = \pm S \cdot \sqrt{a \cdot \sigma_r^2 + b \cdot \sigma_\alpha^2}$$

notare che, ovviamente, tali coefficienti "a" e "b" sono le funzioni trigonometriche dipendenti dal valore α , come si vede osservando la (6.42). Si vede infatti che a e b aumentano (con $b > a$) quando aumenta l'angolo α , ovvero quanto più lo strumento collima in direzioni molto discoste (angolarmente) dall'orizzontale per lo strumento stesso: questo suggerisce di adottare, in ogni caso, strumenti molto precisi nelle misure angolari (teodoliti ad alta precisione).

Per distanze superiori ai 2\3 Km occorre valutare anche l'errore dovuto al termine correttivo:

$$\frac{1-K}{2R} S^2$$

Per quanto riguarda invece l'errore dovuto al termine che approssima la superficie di riferimento a quella sferica, si è calcolato che non influiscono in maniera apprezzabile sul dislivello.

Resta ora da verificare soltanto l'errore dovuto alla misura del coefficiente di rifrazione K notando che il calcolo del coefficiente è eseguito tramite le due misure:

$$K = 1 - \frac{R}{S}(\varphi_A + \varphi_B - \pi)$$

osservando che φ_A e φ_B sono affetti da un errore medio pari a $\pm 2''$, si ottiene per esempio:

$$\sigma_K = \pm 0,02 \text{ per } S = 5 \text{ Km e } \sigma_K = \pm 0,1 \text{ per } S = 10 \text{ Km} .$$

Assumendo per $\sigma_K = \pm 0,02$ si vede che all'aumentare della distanza S (precisamente per $S > 3$ Km) l'influenza dell'errore su K non è più trascurabile rispetto a quella sul termine $S \times \text{tg} \alpha$; si può calcolare che per $S > 10$ Km l'errore sul dislivello non si può più ritenere proporzionale alla distanza, ma proporzionalmente al quadrato della distanza, raggiungendo rapidamente valori dell'ordine del metro. È dunque sconsigliabile eseguire misure di dislivelli fra punti distanti più di 10 Km (fra l'altro l'ipotesi di superficie di riferimento sferica non è più tanto accettabile oltre tale distanza).

L'errore dovuto al termine correttivo $\frac{1-K}{2R}S^2$ dipendente dalla sola variabile aleatoria K (quindi termine correttivo lega "K" tramite una funzione lineare), ha dunque la forma:

$$\sigma_{\Delta(K)} = \frac{S^2}{2R} \cdot \sigma_K$$

In conclusione, dovendo collegare altimetricamente punti distanti più di 10 Km, conviene ottenere il dislivello totale come somma di dislivelli parziali; per esempio, per collegare vertici di I ordine, si preferisce passare attraverso misure di dislivelli tra vertici di ordine inferiore, posti a distanze molto minori.

6.4.3 Livellazione geometrica

La livellazione geometrica è un'operazione che consente di misurare la differenza di quota, o dislivello, fra i punti della superficie terrestre; questa può essere *ordinaria* o *di precisione*.

Il primo caso si ha per:

- la determinazione delle quote dei punti di inquadramento altimetrico di rilievi a grande scala;
- l'integrazione altimetrica di rilievi fotogrammetrici a grande e media scala;
- il rilievo di tracciati per opere di ingegneria (strade, ferrovie, canalizzazioni, ecc.).

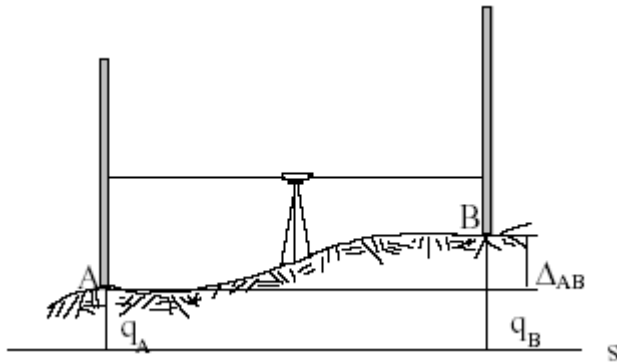
Si adotta invece la livellazione di precisione per:

- la determinazione delle quote dei caposaldi di livellazione della rete di inquadramento altimetrico;
- valutare assestamenti del suolo che coinvolgono aree molto estese (decine o centinaia di km);
- il controllo di grandi strutture;

- il controllo dell'orizzontalità dei grossi impianti industriali.

6.4.3.1 Livellazione dal mezzo

Per determinare il dislivello fra due punti A e B mediante livellazione geometrica, si ricorre al livello che, come già visto, deve soddisfare la condizione di poter disporre orizzontale l'asse di collimazione del cannocchiale. Pertanto, dopo aver posizionato il livello uguale distanza d dai due punti e averlo posto in stazione (avendo reso l'asse di collimazione orizzontale mediante l'ausilio delle tre viti calanti e della vite di elevazione) si eseguono le letture.



Lo schema è il seguente: si considerano due punti A e B distanti circa 100 m e si suppone di dover misurare il dislivello. A tale distanza le verticali passanti per i due punti possono essere considerate parallele e la superficie di riferimento delle quote, la quale può essere assimilabile ad un piano orizzontale

perpendicolare alle verticali stesse.

Il dislivello fra i punti A e B sarà la differenza fra le distanze dei punti A e B dalla superficie di riferimento s .

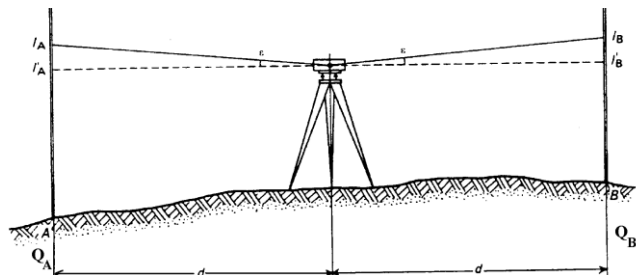
Per misurare il dislivello si dispone una stadia graduata su ciascuno dei punti A e B rendendole verticali per mezzo delle livelle sferiche montate su di esse e si fa stazione con il livello su un punto O equidistante da A e B, ma non necessariamente allineato con essi; si collima dapprima la stadia posta in A eseguendo la lettura L_A ; si ruota quindi il cannocchiale sino a collimare la stadia posta in B e si esegue la lettura L_B .

Il dislivello sarà allora:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = L_A - L_B$$

visto che le visuali realizzate collimando le stadie in A ed in B sono orizzontali e perciò parallele alla superficie di riferimento.

Se lo strumento non è perfettamente



rettificato (errore residuo), l'asse di collimazione e la tangente centrale della livella (che supponiamo orizzontale) formano un piccolo angolo ε di cui l'asse di collimazione resta costantemente inclinato, indipendentemente dalla direzione in cui si osserva (purché in ogni lettura si centri la livella). Le letture saranno:

$$L'_A = L_A \pm (d_A \operatorname{tg} \varepsilon)$$

$$L'_B = L_B \pm (d_B \operatorname{tg} \varepsilon)$$

con il segno \pm a seconda dell'inclinazione di ε .

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = L_A - L_B = L'_A - d_A \operatorname{tg} \varepsilon - L'_B + d_B \operatorname{tg} \varepsilon$$

Vista la posizione dello (*livellazione geometrica dal mezzo*), si ha $d_A = d_B$ da cui:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = L_A - L_B$$

La quantità $(d_A - d_B) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ per differenza di distanza fra i due punti pari a $2m$ è dell'ordine di

$2m \cdot 10''$ ovvero $\frac{2 \cdot 10}{206.265} \approx \pm 0.1 \text{ mm}$; quantità trascurabile nelle operazioni tecniche, ma non per

misure di alta precisione.

In generale è possibile osservare che $\Delta_{AB} = L_A - L_B$ fornisce la differenza di quota fra i due punti rispetto alla superficie equipotenziale (superficie di livello) del campo della gravità passante per il centro dello strumento, a condizione che la superficie equipotenziale della gravità sia abbastanza simmetrica rispetto all'asse dello strumento.

Si può notare che all'atto pratico, ovvero, per distanze dell'ordine dei 100 m, la dissimmetria della superficie equipotenziale è talmente piccola e la curvatura talmente irrilevante che l'errore che si commette nella misura del dislivello è una frazione piccolissima. Infatti, essendo la linea di mira (orizzontale per lo strumento) una linea retta e la superficie equipotenziale una superficie curva (nel piano visibile come una linea curva) intersecherà le due stadi in punti leggermente al di sotto dei punti della linea di mira (molto piccola dell'ordine dei 0,2 mm) che indichiamo per le due stadi con a e b . Se risulta: $a=b$ si ottiene direttamente la differenza delle distanze equipotenziali. Si può, dunque, affermare che, qualunque sia la forma delle superfici equipotenziali del campo della gravità, la differenza tra battuta indietro e in avanti, operando con livellazione geometrica nel mezzo, fornisce la differenza di quota fra i due punti rispetto alla superficie equipotenziale passante per il centro dello strumento.

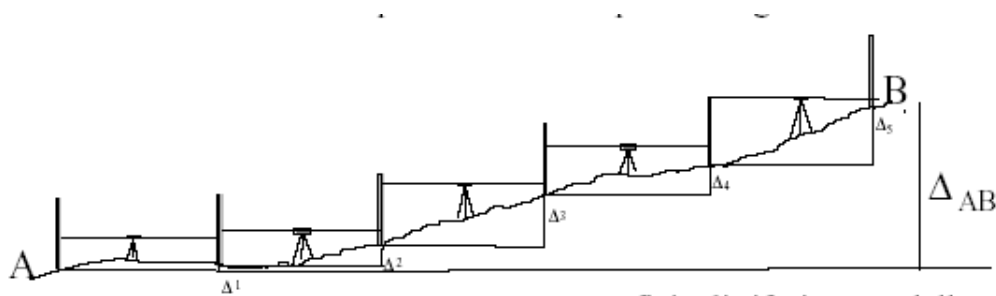
Lo stesso dicasi per l'effetto della rifrazione atmosferica, il quale essendo comunque un valore piccolo (circa 0,03 mm a 50 m), è completamente eliminato se la rifrazione è simmetrica rispetto al punto di stazione, ed influisce per una piccola frazione del suo valore globale, quindi una quantità generalmente trascurabile anche se la rifrazione non è simmetrica.

Quando si deve misurare il dislivello fra punti la cui distanza sia superiore ai 100 m o fra punti non visibili fra loro si eseguono più battute di livellazione.

Si divide cioè la loro distanza in tratti per ciascuno dei quali si esegue una battuta dal mezzo e vale quanto detto in precedenza.

La misura del dislivello risulta:

$$\Delta_{AB} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n$$



Bisogna rilevare che, affinché abbia un senso definire il dislivello fra A e B in tale situazione, si deve fare l'ipotesi che le superfici equipotenziali sono fra loro parallele: *con tale ipotesi il dislivello può essere riferito ad una qualunque delle superfici equipotenziali passanti per i successivi centri dello strumento.*

6.4.3.2 Determinazione dell'errore medio a priori

Se il dislivello può essere determinato con una sola stazione di livellazione: $\Delta_{AB} = L_A - L_B$

l'errore sul dislivello sarà dato da:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial L_A} \right)^2 \sigma_{L_A}^2 + \left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial L_B} \right)^2 \sigma_{L_B}^2$$

Poiché le letture in A e B sono eseguite con la stessa accuratezza (stadie sono fatte ad uguale distanza, con il medesimo strumento, dal medesimo operatore e in tempi immediatamente successivi) si può supporre:

$$\sigma_L^2 = \sigma_{L_A}^2 = \sigma_{L_B}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\Delta} = \pm \sigma_L \cdot \sqrt{2}$$

essendo in generale $\sigma_L = \pm 1mm \Rightarrow \sigma_\Delta = \pm 1\sqrt{2} = 1,4mm$

Se i punti A e B sono distanziati più di 100 m, per cui dobbiamo fare un certo numero n di stazioni, il dislivello è dato da:

$$\Delta_{AB} = \sum_1^n (l_i - l_a)_j$$

e quindi l'errore totale risulterà essere:

$$\sigma_\Delta = \pm \sigma_L \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}$$

questa relazione è stata ricavata supponendo che l'errore di lettura lj sia uguale sia in avanti che in dietro e per tratti i-a uguali (distanze di battuta uguali, o almeno il più possibile).

Se si indica con D la lunghezza complessiva del tratto AB, il numero n di stazioni sarà dato da:

$n \cdot 2d = D$; (d è la lunghezza da una stadia e lo strumento di misura). Quindi si ha:

$$n = \frac{D}{2d} \Rightarrow \sigma_\Delta = \pm \sigma_L \cdot \sqrt{\frac{D}{d}}$$

Se consideriamo ad esempio una livellazione ordinaria di 10 battute, si ha un e.q.m.

$$\sigma_\Delta = \pm 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \pm 4,47mm \cong 4,5mm$$

Quanto detto indica come la livellazione geometrica è un'operazione che consente il conseguimento di precisioni notevoli.

Per fare una valutazione numerica di σ_L bisogna considerare il tipo di strumento e di stadia, infatti, l'errore di collimazione e lettura dipende da due cause: un errore accidentale di apprezzamento della posizione del filo del reticolo rispetto all'immagine della stadia (che dipende dal potere risolutivo del cannocchiale) e un errore accidentale di orizzontalità della linea di collimazione (che dipende dall'errore accidentale di centramento della livella); entrambe le cause concorrono in maniera proporzionale alla distanza di collimazione; di conseguenza si ha:

$$\sigma_L = \pm K \sqrt{\frac{U}{I \cdot s''}} \cdot d \Rightarrow \text{per stessi strumenti} \quad \sigma_L = \pm K \sqrt{d} \Rightarrow \sigma_\Delta = \pm K \cdot \sqrt{D}$$

L'errore sulla differenza di quota è quindi proporzionale alla radice quadrata della distanza di collimazione.

6.4.3.3 Livellazione geometrica di precisione

Operando secondo lo schema descritto, qualora si adottino particolari accorgimenti e si impieghino strumenti di precisione, è possibile determinare il dislivello fra punti distanti con precisione anche molto elevata.

Con la livellazione geometrica di precisione si ottiene un e.q.m. nelle misure del dislivello di $\pm 1\text{mm} / \text{km}$, inoltre, poiché l'e.q.m. di determinazione del dislivello di una livellazione geometrica ordinaria è dovuto essenzialmente, come già visto, all'errore di stima nella lettura alla stadia, in fase di livellazione geometrica di precisione si adotteranno accorgimenti per rendere tale errore di ordine inferiore.

Il livello di precisione avrà allora una meccanica più precisa, un cannocchiale con possibilità di maggiori ingrandimenti e soprattutto sarà dotato del dispositivo di lastra pian parallela in maniera da leggere mediante opportuni dispositivi il centesimo della graduazione della stadia.

Le stadie adottate per la livellazione geometrica di precisione sono di tipo indeformabile a nastro di invar recanti generalmente una graduazione al mezzo centimetro. L'e.q.m. di ogni battuta sarà quindi

$$\sigma_{\Delta} = \pm\sqrt{2} \cdot 0,005\text{mm} = \pm 0,07\text{mm}$$

Pertanto, una livellazione si dice di precisione quando il suo errore medio chilometrico è inferiore al millimetro. Lo schema della livellazione è sempre quello dal mezzo, con distanze di battuta non troppo elevate (30 - 40 m). La parte iniziale graduata dell'asta della stadia non deve essere ad una quota inferiore ai 50 cm dal suolo su cui è infissa (in vicinanza del suolo si possono avere, infatti, delle sensibili variazioni della rifrazione) e non deve essere nemmeno troppo elevata (per limitare l'influenza dell'errore di verticalità della stadia).

Per ogni tratto compreso fra due capisaldi successivi le misure devono essere eseguite in andata e ritorno. Lo strumento deve essere tenuto in ombra, a causa della grande influenza che l'irraggiamento solare e gli sbalzi di temperatura hanno sui livelli. Nell'esecuzione delle misure si devono evitare le ore intorno a mezzogiorno, specie durante l'estate, a causa della turbolenza dell'aria in vicinanza del suolo, che provoca un forte tremolio dell'immagine della stadia, con conseguente notevole diminuzione della precisione.

6.4.4 Rettifica del livello

Qualora non si possa usare la livellazione dal mezzo per la presenza di qualche ostacolo, si

ricorre alla livellazione reciproca (fig. 1.10), che consiste nell'eseguire le letture da due stazioni intermedie, ciascuna prossima ad una stadia e tali che siano simmetriche rispetto al punto di mezzo:

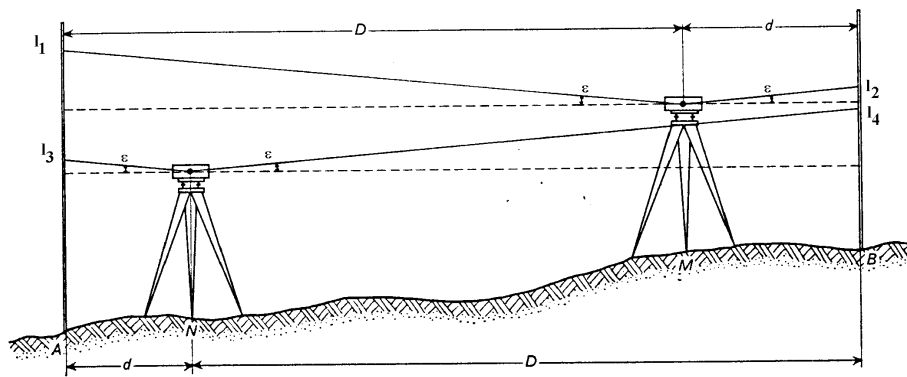
posiz. M: $Q_B - Q_A = L_1 - L_2 - \varepsilon(D-d)$;

posiz. N: $Q_B - Q_A = L_3 - L_4 - \varepsilon(D-d)$;

da cui:

$$Q_B - Q_A = \frac{L_1 - L_2 + L_3 - L_4}{2}$$

(il dislivello corretto è dato dalla differenza delle medie fra le battute indietro e quelle avanti).



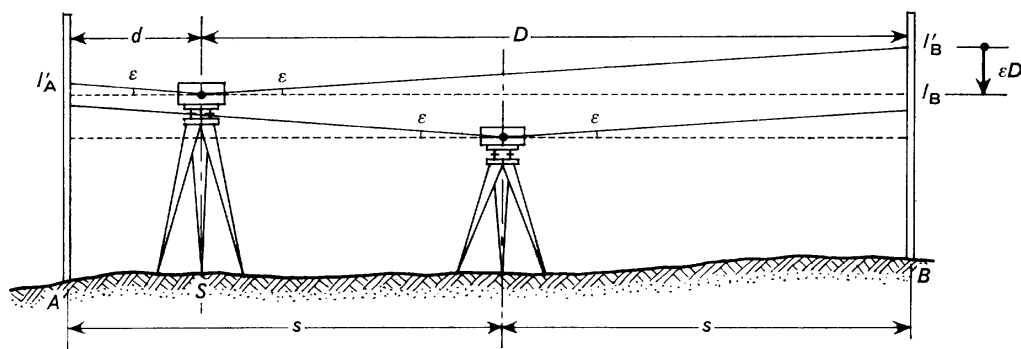
La precisione della livellazione reciproca è tuttavia inferiore a quella del mezzo, sia perché le distanze di collimazione sono più grandi, sia per eventuali piccoli spostamenti del livello e/o delle stadie.

Se si esegue dapprima una livellazione dal mezzo e, sempre dagli stessi punti, anche una livellazione a distanza qualunque, per differenza dalle due si ottiene:

$$(L_1 - L_2) - (L_3 - L_4) = 2\varepsilon(D-d),$$

da cui si ricava l'errore di rettifica

$$\varepsilon = \frac{(L_A - L_B) - (L'_A - L'_B)}{2(D-d)}$$



Poiché la condizione di rettifica è una condizione di parallelismo, si può agire o sul reticolo o sulla livella, ma è più semplice ruotare la tangente centrale. Dalla formula si ricava il valore di ε e, quindi, si può ricavare il valore $(d_A \cdot \text{tg} \varepsilon)$ della stadia più vicina.

In tal modo, si corregge la lettura L'_A muovendo la vite di elevazione fino ad ottenere $L_A = L'_A - (d \cdot \text{tg} \varepsilon)$, a questo punto si centra la livella con la sua “vite di rettifica”.

6.4.5 Superfici di riferimento per le quote

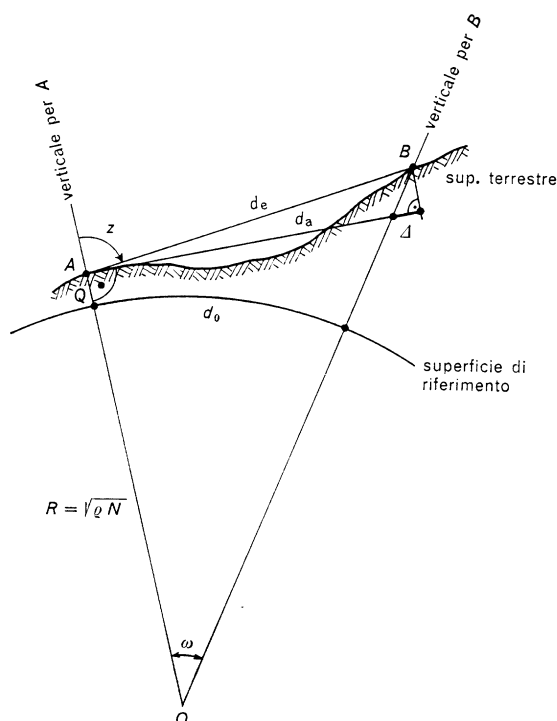
Per distanza tra due punti della superficie terrestre si intende la *lunghezza dell'arco di geodetica che congiunge le proiezioni dei due punti sulla superficie di riferimento*; per

distanze di centinaia di chilometri tale lunghezza può ritenersi uguale alla lunghezza di una delle due sezioni normali che congiungono tali punti sull'ellissoide di riferimento.

È necessario pertanto stabilire:

- le modalità per individuare sulla superficie terrestre la traccia di una sezione normale;
- le modalità per riportare una misura effettivamente eseguita sulla superficie del terreno alla superficie di riferimento.

In merito al primo punto, se la distanza è



inferiore o uguale alla portata dello strumento di misura (ed è quindi misurata con una sola operazione), l'individuazione della sezione normale è intrinsecamente realizzata nel metodo di misura; se la distanza è misurata suddividendola in tronchi per ognuno dei quali lo strumento è utilizzato per un valore minore o uguale alla sua portata, si individua la traccia richiesta sul terreno tramite un'operazione chiamata *allineamento*, facilmente eseguibile con un teodolite.

Dovendo misurare la distanza AB, si pone in A un teodolite ed in B un segnale; collimato B e fissata l'alidada, il piano descritto dall'asse *c* supposto lo strumento rettificato, interseca la superficie terrestre tra A e B secondo una traccia corrispondente alla sezione normale; sui punti del terreno individuati con il centro del reticolo, a distanze opportune, si pongono dei segnali (paline), che consentono di eseguire la misura lungo l'allineamento.

In merito al secondo punto si ricorda che, se la distanza non eccede i 150Km, la superficie ellissoidica si discosta poco da una sfera di raggio $R = \sqrt{\rho N}$ ed è sempre consentita l'ipotesi che la distanza sia assimilabile ad un arco di cerchio massimo sulla sfera locale.

Per la riduzione sulla superficie di riferimento di una distanza notevole misurata in un'unica operazione (per esempio con un distanziometro ad onde) è stato già discusso nei precedenti paragrafi valutando numericamente l'entità della correzione di convergenza Δ .

È bene osservare che la riduzione delle distanze alla superficie di riferimento deve essere eseguita solo per rilievi a scopo cartografico; quando, invece, le misure hanno come scopo l'esecuzione di lavori, quali tracciamento di gallerie, funivie, rilievi di bacini idroelettrici ecc. la riduzione non deve essere apportata, poichè interessano le distanze reali.

6.4.6 Quote ortometriche e quote dinamiche

Si è osservato che, affinché il dislivello fra i punti A e B misurato con livellazione geometrica possa essere definito da $\Delta_{AB} = \sum l_i - l_a$, occorre fare l'ipotesi che le superfici equipotenziali della gravità siano parallele. In realtà le superfici equipotenziali non sono parallele: questo dipende dal fatto che tali superfici non sono equigravitazionali, cioè su di esse l'accelerazione di gravità non è costante.

La *superficie di livello equipotenziale* avrà equazione:

$$W(x; y; z) = \text{cost} \quad (6.38)$$

Si dimostra che tali superfici hanno la proprietà di essere in ogni punto normale al vettore esprimibile mediante l'espressione:

$$\bar{g} = \text{grad}W = \hat{i} \frac{\partial W}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial W}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial W}{\partial z}$$

ciò significa che le componenti del vettore g devono essere tali da fornire:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2} \quad (6.39)$$

dire superficie a gravità costante: $g = \text{cost}$, significa dire:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = \text{cost} \quad (6.40)$$

si riconosce quindi che una superficie a gravità costante non può in generale coincidere con una superficie a potenziale costante.

Le superfici equipotenziali e quelle ad ugual gravità si tagliano secondo delle linee, in generale sghembe, lungo le quali si mantengono costante sia l'accelerazione di gravità che il suo potenziale.

Si è visto nel capitolo della geodesia che le superfici equipotenziali della gravità non sono fra loro parallele.

Infatti, considerando due superfici equipotenziali infinitamente vicine $W_1 = C$ e $W_2 = C + dC$ e due punti qualsiasi A e B sulla prima superficie W_1 , le linee di forza del campo vettoriale (in questo caso del vettore accelerazione di gravità g) passeranno una per il punto A (perpendicolarmente alla superficie W_1) e arriverà (sempre perpendicolarmente) sulla superficie W_2 in un punto A' ; l'altra, analogamente, passerà per i due punti B e B' perpendicolarmente alle superfici W_1 e W_2 , queste due linee sono generalmente curve.

Poiché il campo vettoriale (nel nostro caso è il vettore accelerazione di gravità g) è esprimibile mediante un vettore gradiente, l'integrale Γ calcolato tra due punti di cui uno appartiene alla superficie W_1 e l'altro alla W_2 non dipende dal particolare percorso fatto ma unicamente dalla differenza di valore delle rispettive superfici equipotenziali.

Infatti, risulta:

$$W_2 - W_1 = \int_A^B \text{grad}W \cdot d\bar{x} = \int_A^B \bar{g} \cdot d\bar{x}$$

Applicando questo integrale al caso delle due superfici infinitamente vicine, possiamo scrivere rispettivamente per il punto A e il punto B :

$$dW = W_2 - W_1 \approx g_a dx_a$$

$$dW = W_2 - W_1 \approx g_b dx_b$$

avendo indicato con g_a e g_b l'accelerazione di gravità nei punti A e B; quindi due valori del vettore g calcolati sulla stessa superficie (W1).

Tali relazioni dimostrano che:

$$dW = g_b dx_b = g_a dx_a \quad \rightarrow \quad \frac{dx_b}{dx_a} = \frac{g_a}{g_b} \quad \rightarrow \quad dx_b = dx_a$$

(ovvero superfici parallele) se e solo se risulta $g_a = g_b$, ossia se l'accelerazione di gravità si mantiene costante su una superficie di livello *quindi si deduce che le superfici equipotenziali di un campo vettoriale non sono parallele.*

Consideriamo la cosiddetta gravità normale, ovvero quella parte della gravità che dipende solo da variazioni di latitudine; si può esprimere la variazione del modulo della gravità sul geoide con la seguente formula:

$$g = g_{\text{equatore}} \cdot \left(1 + \frac{g_{\text{polo}} - g_{\text{equatore}}}{g_{\text{equatore}}} \cdot \text{sen}^2 \phi \right)$$

da questa formula si vede che la gravità aumenta dall'equatore al polo. Per dare un'idea dell'entità della variazione, si può notare che la variazione relativa della gravità fra l'equatore e il polo, espressa dal termine:

$$\beta = \frac{g_{\text{polo}} - g_{\text{equatore}}}{g_{\text{equatore}}}$$

è pari a circa 0,005; e poiché le superfici equipotenziali non sono parallele, si può dimostrare che per superfici equipotenziali non troppo distanti, esiste una relazione:

$$\frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{\Delta h_1} \approx \frac{g_1 - g_2}{g_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta h_{\text{polo}} - \Delta h_{\text{equatore}}}{\Delta h_{\text{equatore}}} \approx \frac{g_{\text{polo}} - g_{\text{equatore}}}{g_{\text{equatore}}} = \beta = 0,005$$

pertanto, una superficie di livello a quota 1000 m all'equatore risulta al polo ad una quota di 995 m. In particolare si osserva che una differenza di quota di 1000 m fra due superfici di livello diventa, spostandosi a nord a distanze di circa 1600km, di 999 m fra le stesse superfici; quindi se pensassimo di collegare altimetricamente un punto a sud con un punto situato a nord per mezzo di una linea di livellazione lunga 1600Km, avremo sulla differenza di quota un e.q.m. di ± 40 mm, rispetto al quale è evidente che non può essere trascurato il non parallelismo delle superfici equipotenziali. È da notare che queste considerazioni hanno fondamentale importanza soltanto per le grandi linee di livellazione.

Una differenza di quota tra due punti su superfici equipotenziali diverse è definita come differenza di quota ortometrica. La differenza ortometrica tra un punto A situato sulla superficie equipotenziale W_1 , ed un punto B situato invece sulla superficie equipotenziale W_2 , *equivale a misurare la lunghezza della linea di forza compresa tra il punto B e la superficie W_1* , impossibile da determinare con esattezza.

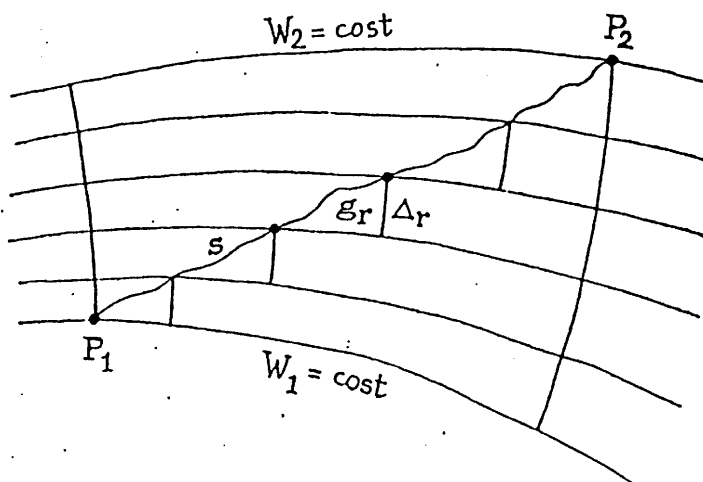
Una determinazione rigorosa non può prescindere dalla conoscenza del valore del vettore accelerazione di gravità in tutti i tratti in cui risulta divisa, dalle varie superfici equipotenziali la linea di forza che parte dalla superficie W_1 e arriva in B su W_2 , infatti, supponendo il punto B sulla superficie terrestre più alto rispetto al punto A, si deve misurare il vettore g lungo una linea di forza.

Questo inconveniente si risolve scegliendo dei punti idonei per misurare il valore di g , ovvero eseguendo le misurazioni lungo il tratto di superficie terrestre che unisce il punto A con il punto B.

Tuttavia essendo le superfici equipotenziali più schiacciate in prossimità di un punto piuttosto che in prossimità dell'altro, la differenza di quota ortometrica è minore nella zona dove le superfici sono più schiacciate, e maggiore dove le superfici sono più larghe.

Questo ha come conseguenza che il risultato della misura dipende dal percorso seguito per collegare i due punti nella misura. Per questo motivo è opportuno che la livellazione segua un percorso intermedio per cui si otterrà una misura intermedia della differenza di quota tra i due punti.

Pertanto, se si deve determinare la differenza di quota tra due punti A e B, si sceglie prima un



percorso S sul terreno, si suddivide in vari tratti, misurando per ogni tratto il dislivello Δ_r tra un caposaldo e il successivo.

Per distanze di 1Km è possibile considerare Δ_r indipendente dal cammino percorso; inoltre indicando con g_r il valore medio dell'accelerazione di gravità in corrispondenza del tratto r -esimo si

ha:

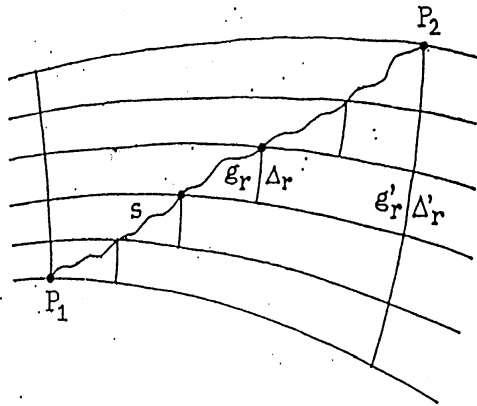
$$\sum g_r \Delta_r = W_1 - W_2$$

La differenza $W_1 - W_2$ è una differenza di potenziali (cioè un “lavoro” per unità di massa); per ridurlo alle dimensioni di una lunghezza si dividerà tale differenza per un’accelerazione ovvero per il valore medio della gravità calcolato alla latitudine di $\pi/4$ ottenendo in tal modo le quote dinamiche:

$$\frac{\sum g_r \Delta_r}{g_m} = \Delta_{AB} \quad \text{quota dinamica}$$

questa differenza è nota solo se sono possibili misure gravimetriche su punti della superficie terrestre lungo il percorso S che unisce i due punti A e B .

Per quanto riguarda invece la misura della quota ortometrica, detto g'_r il valore



dell’accelerazione della gravità lungo una linea di forza e, poichè, tra due superfici equipotenziali risulta che :

$$g_r \cdot \Delta_r = g'_r \cdot \Delta'_r \quad \Rightarrow \quad \Delta'_r = \frac{g_r \cdot \Delta_r}{g'_r}$$

allora ricordando che la definizione di quota ortometrica è: $h_p = \sum \Delta'_r$, si può scrivere:

$$h_p = \sum \frac{g_r \cdot \Delta_r}{g'_r} \quad \text{quota ortometrica}$$

non conoscendo come varia il valore g'_r , all’interno della crosta terrestre, non è possibile calcolare con precisione la quota ortometrica tra due punti, si può solo determinare un valore approssimato della stessa che dipende dalle ipotesi che si fanno sulla variazione della gravità.